

**В.Л. Соседка, канд. техн. наук, Р.А. Мазур**

(Украина, Днепрпетровск, Национальный горный университет)

## АНАЛИЗ МЕТОДИК ПОСТРОЕНИЯ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

При исследовании цифровых систем часто приходится разрабатывать непрерывные модели в дискретном времени, что связано с заменой непрерывных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

разностными уравнениями

$$\begin{aligned} X_d(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k); \\ y_d(k) &= C_d x(k), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A, A_d; B, B_d; C, C_d$  – матрицы коэффициентов, матрицы управления и матрицы выхода непрерывной и дискретной систем регулирования.

Переход от непрерывного времени (1) к дискретному (2) можно осуществить несколькими путями. Самым распространенным является метод импульсной переходной функции, реализация которого не всегда дает необходимую информацию, так как фазовые координаты дискретной и непрерывной модели определены в разных базисах.

Проиллюстрируем это положение на конкретном примере, заданном передаточной функцией

$$W_H(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (3)$$

с интервалом дискретности  $T_H = 0,5$  с. Соответствующая выражению (3) дискретная передаточная функция имеет вид

$$W(z) = \frac{0,1065z + 0,0902}{z^2 - 1,607z + 0,6665}. \quad (4)$$

По передаточным функциям (3) и (4) в пакете Simulink созданы модели (рис.1) с непрерывным и дискретным временем. Результаты моделирования (рис.2) показывают совпадение в дискретные моменты времени выходных координат (кривые 2 и 3) и резкое отличие (кривые 1 и 4) промежуточных коор-

динат. Этот существенный недостаток не позволяет применять предложенную модель дискретного времени в цифровых системах.

Используя уравнения пространства состояния непрерывных (1) и дискретных (2) систем, можно построить модели в одинаковых базисах, что приведет к совпадению всех фазовых координат [1, 2]. В основу создания дискретных моделей по этому методу, назовем его методом согласования базисов во временной области, положено условие, что решение аналогового уравнения (1) при  $t = kT_{II}$  будет совпадать с решением дискретного уравнения (2).

Поскольку выход экстраполятора нулевого порядка, на интервале дискретности сохраняет постоянное значение, то можно записать условия, при которых фазовые координаты непрерывной и дискретной моделей при  $t = kT_{II}$  будут совпадать:

$$X = X_d, \quad A_d = \Phi(t)_{t=T_{II}}, \quad B_d = \left[ \int_0^{T_{II}} \Phi(T - \phi) d\phi \right] B, \quad C_d = C. \quad (5)$$

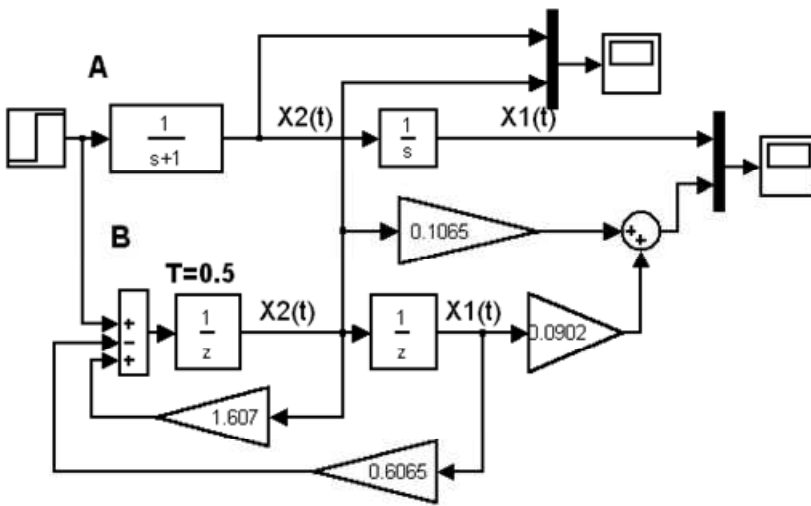


Рис.1. Схема моделирования систем регулирования: А – непрерывная модель; В – дискретная модель, полученная методом импульсной переходной функции

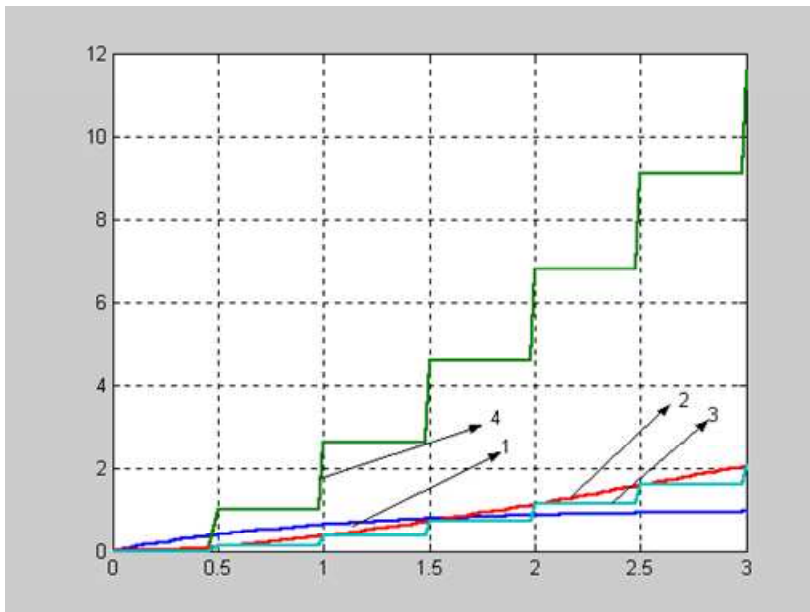


Рис.2. Переходные процессы в системах регулирования с непрерывным (кривые 1,2) и дискретным (кривые 3,4) временем

Из (5) следует, что параметры дискретной модели  $A_d$  и  $B_d$  определяются через переходную матрицу, которая при  $t = kT_{II}$  преобразуется в числовую. Из

известных способов определения переходных матриц применим преобразование Лапласа, которое относительно просто программируется в пакете MatLab.

Используя аналоговую модель непрерывной системы (рис.1 А), запишем ее уравнения в пространстве состояния:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [1 \quad 0]x(t).$$

Тогда для дискретной модели матрица  $A_d$  при  $t = T_{II} = 0,5$  с принимает значения:

$$A_d = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{array} \right]_{t=T_{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3935 \\ 0 & 0,6065 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Далее определяем матрицу управления  $B_d$

$$B_d = \left[ \int \Phi(T_{II} - \phi) d\phi B \right] = \begin{bmatrix} \int_0^{T_{II}} d\phi & \int_0^{T_{II}} (0,5 - e^{-\phi}) d\phi \\ 0 & \int_0^{T_{II}} e^{-\phi} d\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1065 \\ 0 & 0,3935 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1065 \\ 0,3935 \end{bmatrix}$$

и дискретную модель системы

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3935 \\ 0 & 0,6065 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1065 \\ 0,3935 \end{bmatrix} u(k). \quad (7)$$

В соответствии с уравнениями (7) на рис.3 представлена схема моделирования дискретной и непрерывной систем регулирования, а на рис.4 – результаты моделирования.

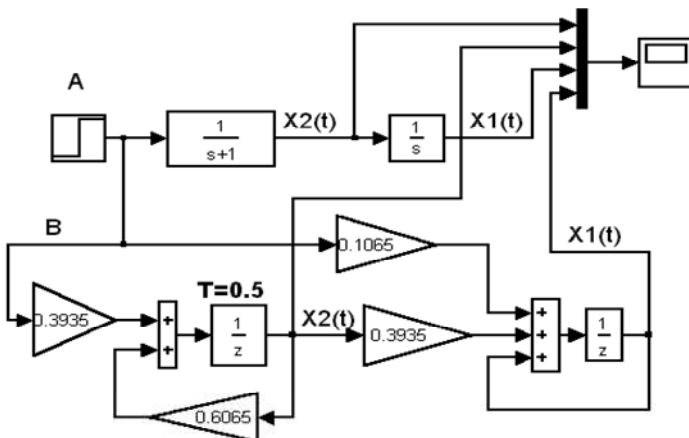


Рис.3. Схемы моделирования системы регулирования:

А – непрерывная модель;

В – дискретная модель, полученная методом согласования базисов во временной области

Сравнивая переходные характеристики по фазовым координатам  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  видим, что в дискретные моменты времени ( $t = kT_D$ ) они совпадают, хотя структурные схемы (рис.3) характеризуются значительными отличиями.

Создание дискретных моделей методом согласования базисов по переходным матрицам является высокоформализованным средством описания систем управления методикой, которая не зависит от сложности объекта, но требует большого объема формализованных вычислений и поэтому вся процедура расчетов выполняется с применением ЭВМ. Ниже приведены программы в пакете MatLab, иллюстрирующие эти положения.

**%ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ**

**%ЧАСТЬ 1**

```

a=[0,1;0,-1];b=[0;1]; %Исходные данные: матрица коэффициентов,
c=[1,0];d=0;          %матрица управления, матрица выхода.
h=ss(a,b,c,d);        %Формирование модели в форме SS/
    
```

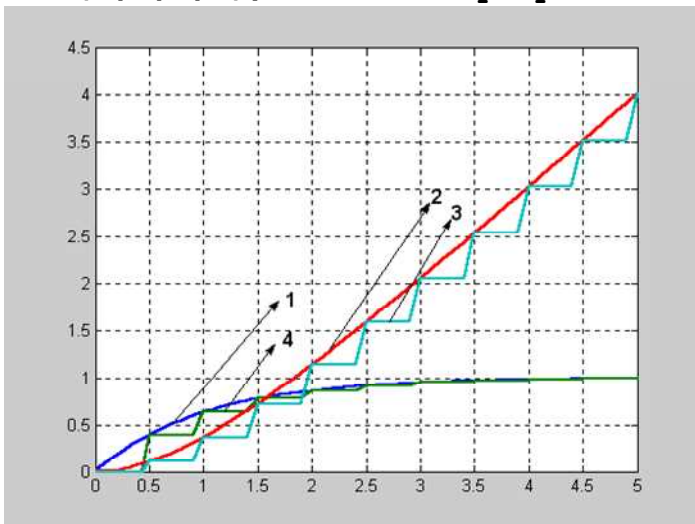


Рис.4. Переходные процессы в системах регулирования:  
1,2 – непрерывное время;  
3,4 – дискретное время

```

syms s t                %Ввод символьных переменных.
i=[s,0;0,s];          %Формирование диагональной матрицы.
f=ilaplace(inv(i-a))  %Определение переходной матрицы.
t=0.5;                %Ввод численного значения. Интервал дискретности.
subs(f)                %Подстановка численных значений в символьные
                       %выражения.
syms t                %Ввод символьных переменных.
f1=int(f,t,0,0.5)     %Символьное вычисление определенных интегралов.
s=subs(f1)            %Подстановка численных значений в символьные
                       %выражения.
bd=s*b                %Определение матрицы управления в дискретной
                       %модели.

%ЧАСТЬ 2
[aa,bb]=c2d(a,b,0.5) %Определение дискретной модели по матрице
                       %коэффициентов, матрице управления и
                       %интервалу дискретности одной командой MATLAB
    
```

Первая программа пошагово отражает процедуры получения матриц  $A_d$  и  $B_d$  дискретных систем методом согласования базисов во временной области.

Вторая – использует одну команду, которая, по заданным параметрам непрерывной системы и интервалу дискретности, определяет значения  $A_d$  и  $B_d$ .

Применение метода согласования базисов встречает затруднения, связанные с тем, что он требует знание элементов матричной алгебры, основных положений современной теории управления и значительного объема вычислений при определении влияния изменения какого-либо параметра.

В значительной степени эти недостатки устранены в методе, который назовём методом согласования базисов в частотной области. При его применении предварительно составляется детализированная структурная схема (ДСС) непрерывной системы [3], а оператор непрерывного интегрирования заменяется Z-оператором (цифровым интегратором).

Существует несколько методов численного интегрирования. Для метода прямоугольников по прямому методу Эйлера переход к цифровому интегрированию имеет вид  $\frac{1}{p} = \frac{T_{II}}{1-z^{-1}}$ , а для обратного метода Эйлера переход к дискретной модели следующий:

$$\frac{1}{p} = \frac{T_{II} z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

Существуют и более сложные методы численного интегрирования, из которых целесообразно выделить трапецеидальную аппроксимацию

$\frac{1}{p} = \frac{T_{II}}{2} \cdot \frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})}$ , которая незначительно усложняет формулы Эйлера, но имеет идеальную фазовую характеристику и вводит ослабление на высоких частотах, уменьшая влияние внешних возмущений.

Для каждого из цифровых интеграторов на рис.5 представлены схемы моделирования, и создание дискретной модели методом согласования базисов в частотной области предельно упрощается:

- создается ДСС непрерывной системы;
- непрерывный интегратор заменяется цифровым интегратором, структура которого зависит от принятого метода аппроксимации.

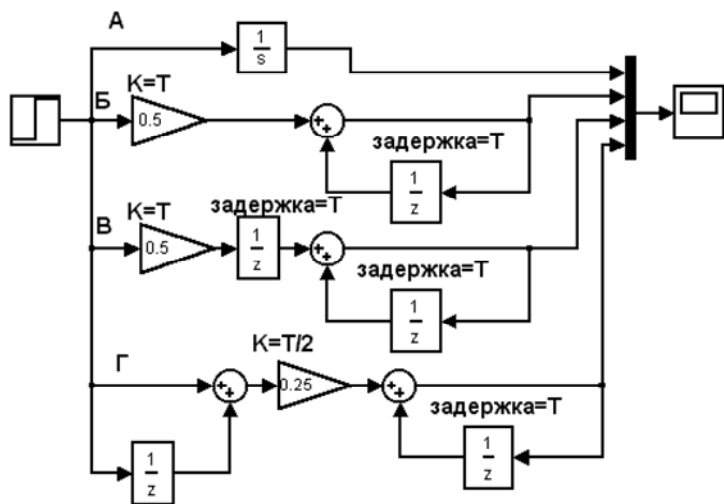


Рис.5. Схема моделирования цифровых интеграторов:  
 А - аналоговое интегрирование;  
 Б – прямой метод Эйлера;  
 В – обратный метод Эйлера;  
 Г – трапецеидальная аппроксимация

На рис.6 представлены схемы моделирования непрерывной и дискретной систем регулирования, а на рис.7 – результаты моделирования.

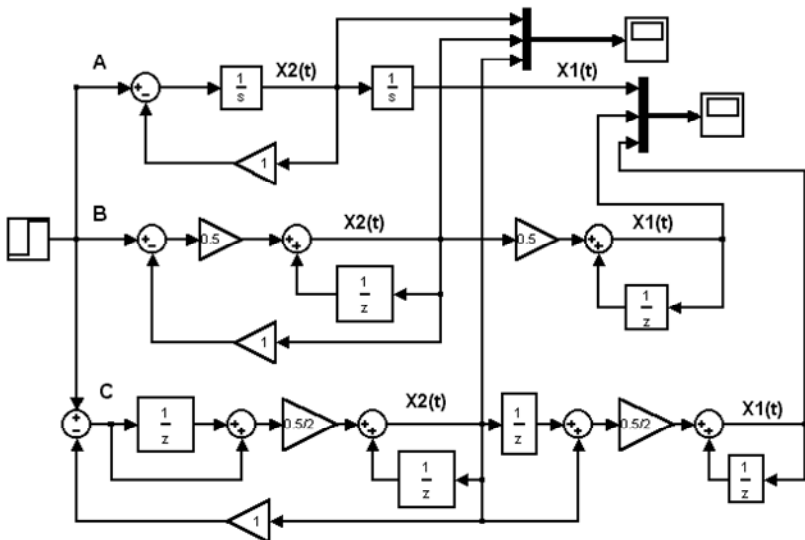


Рис.6. Схемы моделирования:  
 А – непрерывная система;  
 В, С – дискретная система,  
 использующая прямой метод  
 Эйлера и трапецидальную  
 аппроксимацию

Из рис.6 следует, что для получения дискретной модели необходимо непрерывный интегратор заменить цифровым при неизменных значениях коэффициентов обратных связей интегратора, а кривые на рис.7 показывают характер приближения дискретного процесса к непрерывному, в зависимости от метода численного интегрирования.

Причем, фазовые координаты непрерывной системы в дискретные моменты времени совпадают с соответствующими координатами дискретной системы и отличие наблюдается только в начале процесса по координате  $X_2(t)$ . При трапецидальной аппроксимации различие между кривыми 1 и 2 будет минимизировать среднеквадратичную ошибку, что дает лучшее приближение не только с методами Эйлера, но и с кривыми, полученными методом согласования базисов во временной области.

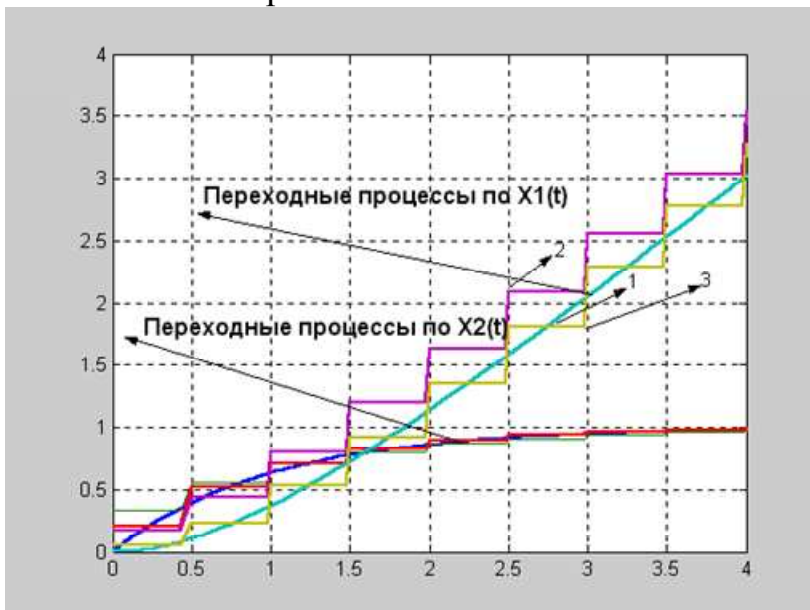


Рис.7. Переходные процессы  
 в исследуемых системах:  
 1 – непрерывная система;  
 2, 3 – дискретная система при  
 прямом методе Эйлера и  
 трапецидальной  
 аппроксимации

Изменение постоянной времени какого-либо звена приводит к изменению коэффициента усиления усилителя, стоящего в обратной связи интегратора.

Согласование базисов во временной области приводит к повторному расчету всей системы, что вызовет изменение нескольких параметров структурной схемы. Изменение постоянной времени в методе, используемом ДСС, приводит к изменению только одного коэффициента, что не требует повторных расчетов, без изменения структуры модели.

Итак, метод согласования базисов в частотной области:

- проще метода согласования базисов во временной области, так как позволяет решать задачи в рамках классической теории и не требует знаний матричной алгебры;
- имеет более широкие возможности, поскольку дает возможность применять разные методы аппроксимации и, как частный случай, метод, используемый при согласовании базисов во временной области;
- исключает расчеты и может быть выполнен без применения ЭВМ;
- при изменении параметра системы приводит к изменению одного коэффициента в цепи обратной связи интегратора и не требует пересчета всех параметров модели.

#### **Список литературы**

1. G.F. Franrlin, J.D.Powell, and Workman. Digital Control of Dynamic Systems, 3 rd ed. Reading, MA: Addison, 1998.
2. Филипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория «Базовых Знаний», 2001. – 616 с.
3. Башарин А.В., Постников Ю.В. Примеры расчета автоматизированного привода на ЭВМ: Учеб. пособие для вузов. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 512 с.