УДК 519.6

В.И. Корсун, д-р техн. наук, Ю.В. Жихарев
(Украина, Днепропетровск, Национальный горный университет)

ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ОСНОВАННОГО НА ПРИНЦИПЕ СИММЕТРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ТЯЖЕЛЫХ ШАРИКОВ

Введение

При проектировании различного рода устройств и современных систем управления возникает необходимость нахождения наилучшего решения из некоторого множества возможных. Математически это формулируется в виде задачи поиска экстремума функции $f(x)$.

Для решения последней очень часто привлекают методы установления [1]: градиентный метод и метод тяжелого шарика, нестационарные процессы которых описываются векторными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} + kgrad\ f(x) = 0, \qquad k > 0; \tag{1}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \nu\frac{dx}{dt} + gradf(x) = 0, \quad m > 0, \quad \nu > 0\ . \tag{2}$$

соответственно. Предполагается, что с течением времени эти процессы сойдутся в точке экстремума.

Алгоритмы (1) и (2) наряду с преимуществами, имеют и некоторые недостатки. Процесс поиска, реализуемый алгоритмом (1), заканчивается, например, в первом локальном экстремуме, который встречается на пути движения изображающей точки. Что же касается алгоритма (2), то при соответствующем подборе массы m и коэффициента демпфирования ν он способен за счет инерции тяжелого шарика отыскать глобальный экстремум функции $f(x)$, имеющей рельеф поверхности с небольшой «рябью». При колебаниях рельефа поверхности функции с большей амплитудой алгоритм (2) тоже заканчивает свою работу в ее первом локальном минимуме.

Анализ последних источников, где решается задача распараллеливания процесса поиска экстремума

В работах [2, 3] был предложен и исследован новый метод установления, который реализует процедуру распараллеливания процесса поиска экстремума $f(x)$ посредством взаимодействия аргументов y и z вспомогательной симметрической функции

$$F(y,z) = 0{,}5\left((y-z)^T Q(y-z) + f(y) + f(z)\right), \tag{3}$$

где Q – положительно определенная симметрическая матрица.

В (3) $\min\limits_{y,z} F(y,z) = F\left(x^*, x^*\right)$, где $x^* = \arg\min f(x)$.

Использование градиентного алгоритма, который для функции (3) принимает вид системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -kQ(y-z) - 0{,}5k\,grad f(y), \quad y(0) = y_0; \\ \dfrac{dz}{dt} = -kQ(z-y) - 0{,}5k\,grad f(z), \quad z(0) = z_0 \neq y_0, \quad k > 0, \end{cases} \tag{4}$$

при поиске глобального экстремума функции $f(x)$ не дает положительного результата: изображающие точки останавливаются в локальных экстремумах (рис.1).

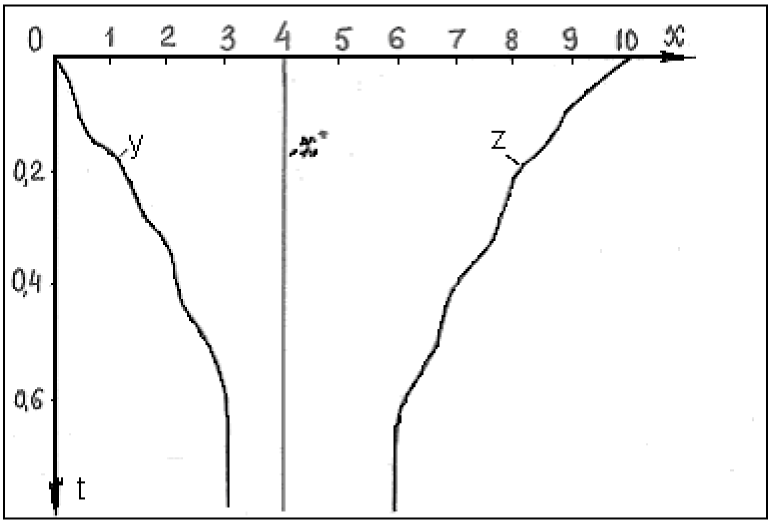

Рис.1. Траектории движения изображающих точек y и z, заканчивающиеся в локальных экстремумах

Постановка задачи

Ставится задача усовершенствования классического алгоритма тяжелого шарика [4] с помощью использования принципа симметрии, а также исследования работы предлагаемого метода поиска экстремума функции путем математического моделирования.

Синтез алгоритма поиска экстремума функции

Действительно, применив алгоритм (2) к вспомогательной симметрической функции (3), получим:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} y \\ \cdots \\ z \end{bmatrix}+\nu\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ \cdots \\ z \end{bmatrix}+gradF(y,z)=0. \tag{5}$$

Выражение (5) можно представить как

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2y}{dt^2}+\nu\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{\partial F(y,z)}{\partial y}=0; \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}+\nu\dfrac{dz}{dt}+\dfrac{\partial F(y,z)}{\partial z}=0. \end{cases} \tag{6}$$

Исследуем работу алгоритма (6) при поиске глобального экстремума функции

$$f(x)=k(x-a)^2+b-c\,cos(2\pi x). \tag{7}$$

Выбор этой функции для тестирования алгоритма (6) обусловлен ее многоэкстремальным характером: график $f(x)$ содержит большое количество локальных экстремумов, которые находятся в непосредственной близости от глобального экстремума.

Вспомогательная симметрическая функция $F(y,z)$ для (7) запишется следующим образом:

$$F(y,z)=0{,}5\left(k(y-a)^2+b-c\,cos(2\pi y)+k(z-a)^2+b-c\,cos(2\pi z)\right)+0{,}5q(y-z)^2. \tag{8}$$

Ей соответствует алгоритм (6) :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=y_2; \\ \dfrac{dy_2}{dt}=-\dfrac{k}{m}(y_1-a)-2\pi\dfrac{c}{m}sin(2\pi y_1)-q(y_1-z_1)-\dfrac{\nu}{m}y_2; \\ \dfrac{dz_1}{dt}=z_2; \\ \dfrac{dz_2}{dt}=-\dfrac{k}{m}(z_1-a)-2\pi\dfrac{c}{m}sin(2\pi z_1)+q(y_1-z_1)-\dfrac{\nu}{m}z_2, \end{cases} \tag{9}$$

где $y_1=y;\ z_1=z.$

Аналитическое и графическое представления функция (7) при $k=0{,}2$, $a=4,\ b=3$ и $c=0{,}5$ будут иметь вид:

$$f(x) = 0{,}2(x-4)^2 + 3 - 0{,}5\cos(2\pi x). \qquad (10)$$

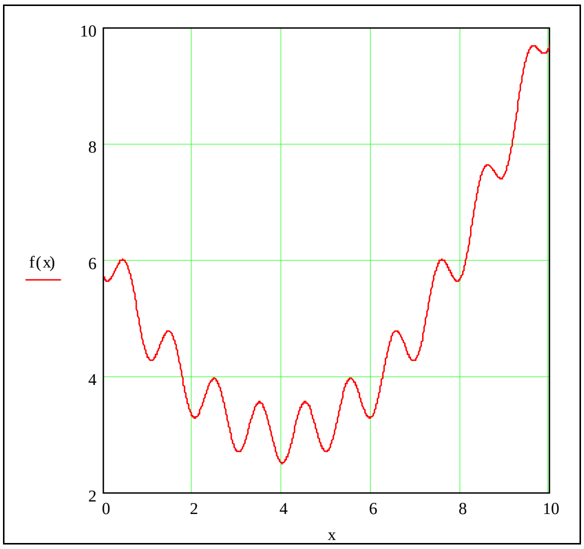

Рис.2. График многоэкстремальной функции (10)

Для решения системы (9) зададим начальные условия. Из рис.2 видим, что глобальный оптимум находится в точке с координатой $x = 4$. Поэтому выберем $y_1(0) = 0$, $z_1(0) = 10$. Предположим, что шарики в начальный момент времени находятся в состоянии покоя, т.е. $y_2(0) = z_2(0) = 0$. Кроме того, примем $q = 1$, $\nu = 2$.

Результаты решения системы (9) приведены на рис.3.

Для этого были задействованы тяжелые шарики с массами $m = 2{,}16$ каждый. Из расчетов следует, что $y_1(10) = 4{,}044$, $z_1(10) = 3{,}986$.

Регулируя массы тяжелых шариков, можно без труда получить еще более высокую точность результата. Главная цель, преследуемая при этом, – путем настройки параметра m в коэффициентах $\frac{\nu}{m}$ и $\frac{1}{m}$ системы (9) предотвратить сходимость изображающих точек в локальном экстремуме функции $f(x)$.

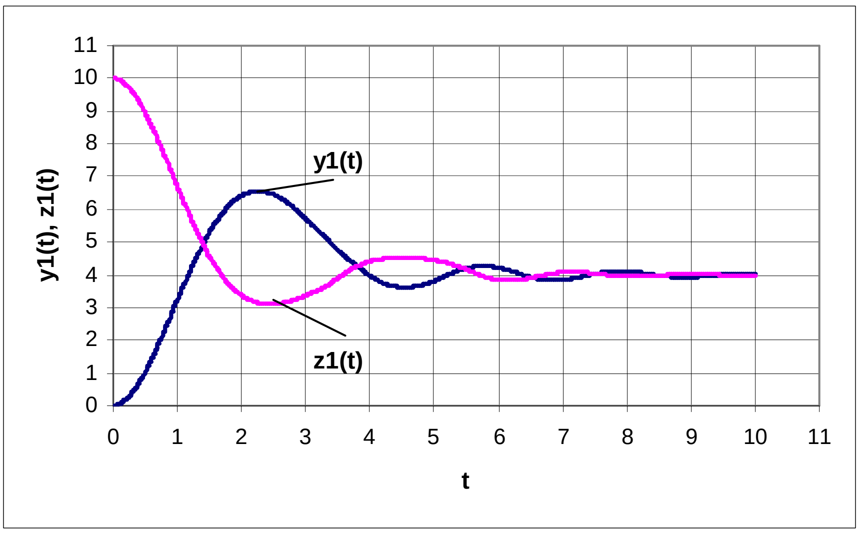

Рис.3. Решение системы (9) для тяжелых шариков с массами $m = 2{,}16$ каждый

Нетрудно заметить, что процесс движения изображающих точек сходится к точке глобального экстремума $x^* = 4$.

Осуществим дальнейшее исследование алгоритма (6). Для этого увеличим в формуле (7) параметр c, который регулирует амплитуду колебаний одной из составляющих этой функции, в несколько раз. Например, вместо $c = 0{,}5$ возьмем $c = 2$ и проведем анализ процесса поиска глобального экстремума полученной функции $f(x) = 0{,}2(x-4)^2 + 3 - 2\cos(2\pi x)$. Ее график представлен на рис.4, а результаты решения системы (9) при $c = 2$ – на рис.5.

Процесс движения изображающих точек закончился в точке глобального оптимума $x^* = 4$ несмотря на то, что массы тяжелых шариков были неизменными $(m = 3)$. Из расчетов следует, что $y_1(10) = 4{,}047$, $z_1(10) = 4{,}083$, т. е. координата глобального экстремума функции $f(x)$ и в этот раз найдена достаточно точно.

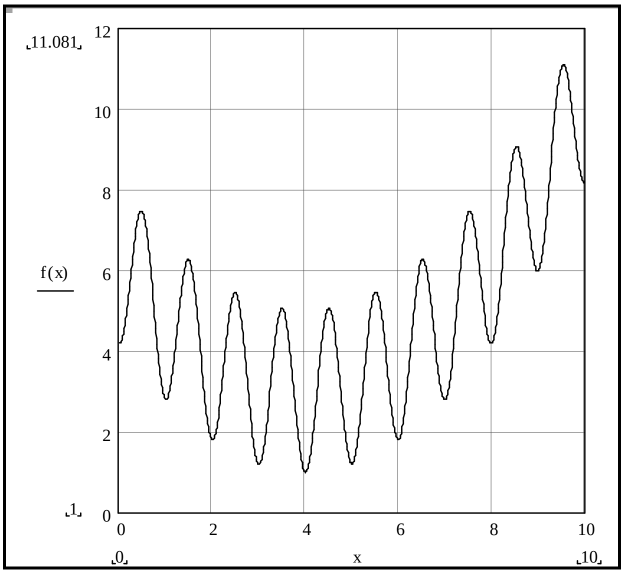

Рис. 4. График функции $f(x) = 0{,}2(x-4)^2 + 3 - 2\cos(2\pi x)$

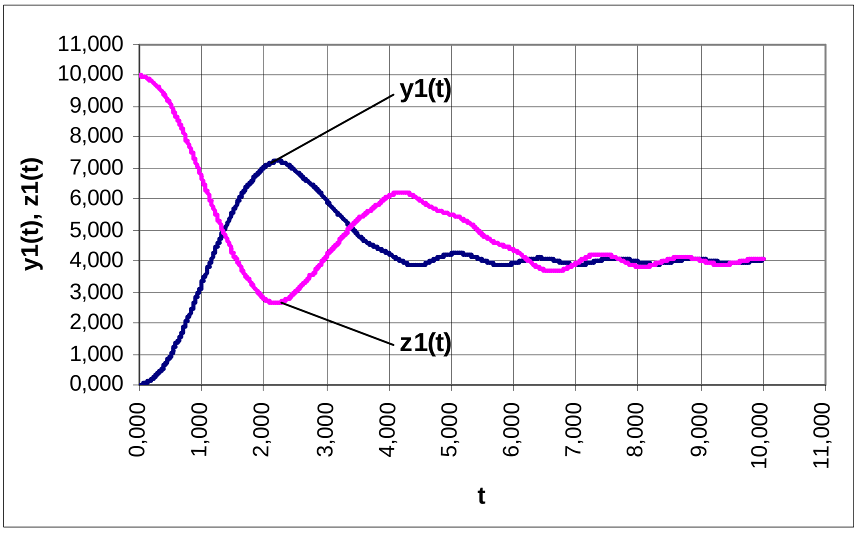

Рис.5. Графическая иллюстрация применения синтезированного алгоритма для функции (7) при $m = 3$ и $c = 2$

При необходимости путем регулирования масс m тяжелых шариков можно получить еще более высокую точность результата.

Выводы

Таким образом, на основании выполненных исследований, видим, что алгоритм, который представляет собою симбиоз метода установления и концепции симметрии, обеспечивает хорошую сходимость изображающих точек к глобальному оптимуму многоэкстремальной функции.

Подобный результат, отличающийся от того, какой дает классический метод тяжелого шарика, можно объяснить именно применением концепции симметрии к процедуре распараллеливания процесса поиска экстремума функции $f(x)$. Начальную скорость шариков можно задавать равной нулю. Двигаться их навстречу друг другу заставляет слагаемое $0{,}5q(y-z)^2$ вспомогательной функции $F(y,z)$. При этом они довольно активно взаимодействуют между собой.

Можно сказать, что шарики связаны эластичной нитью, которая притягивает их друг к другу до тех пор, пока они не остановятся в одной точке (пока не будет выполнено условие $y=z$ и не обнулится слагаемое $0{,}5q(y-z)^2$).

А поскольку используется алгоритм, который предполагает наличие возможности регулирования масс шариков, то процессы движения последних прекратятся в точке глобального оптимума. Шарики во время своего движения подвергнуты не только силам инерции, но и силе притяжения друг к другу.

В заключение следует отметить, что представленный в данной работе алгоритм поиска глобального экстремума функции, основанный на концепции симметрии, обладает хорошей работоспособностью и сходимостью. Об этом говорят не только приведенные здесь результаты, но и результаты его практического применения в задачах адаптивной идентификации объектов управления и автоматизированного проектирования различных устройств и систем.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения).- М.: Наука, 1973.- 632 с.
2. Корсун В.И. Использование симметрии для распараллеливания процесса поиска экстремума целевой функции в задачах оптимального проектирования и адаптивной идентификации // Математические модели и современные информационные технологии: Сб.науч.тр. НАН Украины. Ин-т математики.- К.: 1998.- С.66-68.
3. Корсун В.И., Демиденко М.А. Исследование алгоритма поиска экстремума целевой функции, основанного на применении концепции симметрии и параллельного пространства // Науковий вісник НГА України.- 2000. - №2. -С.101-104
4. Корсун В.И., Жихарев Ю.В., Галюта В.Л. Расширение возможностей методов установления при поиске глобального экстремума функции на основе концепции симметрии //Матеріали міжнародної конференції „Математичні проблеми технічної механіки”.- Дніпропетровськ: ДНВП „Системні технології”. -2005.-С.160.