УДК 621.3.011

В.Л. Соседка, канд. техн. наук,
Р.А. Мазур
(Украина, Днепропетровск, Национальный горный университет)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЪЕКТА ПО КРИВЫМ РАЗГОНА

При синтезе систем регулирования необходимо знать параметры объекта (коэффициенты дифференциальных уравнений или передаточных функций). Для их определения предложено несколько методов, один из них – метод площадей, который в инженерной практике наиболее распространен [1].

Однако этот метод имеет существенные недостатки.

Это повышенные требования:

- к точности вычисления площадей, так как коэффициенты передаточных функций устанавливаются через рекуррентные соотношения и ошибки в определении площадей низкого порядка накапливаются при последующих вычислениях;

- к определению времени запаздывания, которое, во-первых, трудно фиксируется на фоне промышленных помех, а, во-вторых, носит случайный характер (управления тиристорным приводом).

Поставленную задачу будем решать в два этапа: сначала, разработаем методику определения коэффициентов передаточной функции на отдельных участках кривой разгона (исключение времени запаздывания), а затем рассмотрим методику, исключающую рекуррентные алгоритмы.

Пусть исследуемая система регулирования описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^k Y}{dt^k} + Y = X \,, \tag{1}$$

где Y, X – выходные и входные сигналы исследуемой системы.

При $t = 0$ подадим на вход ступенчатое воздействие и к входному и выходному сигналу исследуемой системы применим оператор

$$L\{Y(t)\} = \int_{\tau}^{\infty} Y(t) e^{-pt} dt \,. \tag{2}$$

После преобразования, имеем

$$L\{Y(t)\}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k p^k + 1\right) = \frac{e^{-p\tau}}{p}\left(1 + p\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{e=1}^{k} \alpha_{k-e} p^{e-1}\right), \tag{3}$$

где $\alpha_k = Y^k(\tau)$, $k = 0, 1, ..., n$ – значение функции $Y(t)$ и ее производных в момент τ. Величина τ выбирается так, чтобы исключить неконтролируемое время запаздывания.

Применим преобразование (2) к выражению $(1 - Y(t))$ и запишем

$$L\{1 - Y(t)\} = \frac{e^{-p\tau}}{p} - L\{Y(t)\}. \tag{4}$$

Подставляя в (4) значение $L\{Y(t)\}$, после преобразования получим

$$L\{1 - Y(t)\} = e^{-p\tau} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k p^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{e=1}^{k} \alpha_{k-e} p^{e-1}}{\sum_{k=1}^{n} a_k p^k + 1}. \tag{5}$$

Соотношение (5) с учетом (2) записывается в следующем виде:

$$\left(a_k p^k + 1\right)\int_{\tau}^{\infty}[1 - Y(t)]e^{-pt}dt = e^{-p\tau}\sum_{k=1}^{n} a_k \left(p^{k-1} - \sum_{e=1}^{k} \alpha_{k-e} p^{e-1} \right). \tag{6}$$

При рассмотрении выражения (6) ограничимся системой второго порядка, предварительно разложив функции e^{-pt} и $e^{-p\tau}$ в ряд Тейлора.

$$\begin{aligned} &\left(a_2 p^2 + a_1 p + 1\right)\left(s_1 - s_2 p + \frac{s_3}{2} p^2 - \frac{s_4}{6} p^3 + ... \right) = \\ &= \left(1 - p\tau + \frac{p^2\tau^2}{2} - \frac{p^3\tau^3}{6} + ... \right)\left[a_1(1 - \alpha_0) + a_2(p - \alpha_1 + \alpha_0 p)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

где α_0, α_1 – значение функции $Y(t)$ и ее производной при $t = \tau$, а переменные $s_1, s_2, ..., s_n$ выражены через соответствующие интегралы:

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_{\tau}^{\infty}[1 - Y(t)]dt; \\ s_2 &= \int_{\tau}^{\infty}[1 - Y(t)]tdt; \\ &\dots \\ s_n &= \int_{\tau}^{\infty}[1 - Y(t)]t^{n-1}dt. \end{aligned} \tag{8}$$

Приравнивая коэффициенты выражения (7), при одинаковых степенях p получим систему уравнений:

$$\begin{cases} s_1 = a_1(1-\alpha_0) - a_2\alpha_1; \\ a_1 s_1 - s_2 = a_2(1-\alpha_0) - \tau\left[a_1(1-\alpha_0) - a_2\alpha_1\right]; \\ a_2 s_1 - a_1 s_2 + \dfrac{s_3}{2} = \dfrac{\tau^2}{2}\left[a_1(1-\alpha_0) - a_2\alpha_1\right] - \tau a_2(1-\alpha_0); \\ a_2 s_2 + a_1\dfrac{s_3}{2} - \dfrac{s_4}{6} = \dfrac{\tau^3}{6}\left[a_1(1-\alpha_0) - a_2\alpha_1\right] + \dfrac{\tau^2}{2}a_2(1-\alpha_0). \end{cases} \tag{9}$$

Решая первые два уравнения системы (9), можно выразить коэффициенты передаточной функции a_1 и a_2 через интегралы s_1 и s_2, начальные условия $\alpha_0(\tau)$, $\alpha_1(\tau)$ и время достижения выходной величиной системы τ рабочей точки, т.е.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{s_2\alpha_1 - s_1(1+\alpha_1\tau - \alpha_0)}{\alpha_1 s_1 - (1-\alpha_0)^2}; \\ a_2 &= \frac{s_2(1-\alpha_0) - s_1\left[s_1 + \tau(1-\alpha_0)\right]}{\alpha_1 s_1 - (1-\alpha_0)^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Исключая из системы (9) α_0 и α_1, имеем выражения для определения коэффициентов a_1 и a_2 через s_1, s_2, s_3, s_4 и τ. Этим путем целесообразно пользоваться тогда, когда выходной сигнал искажен действиями помех и установление начальных условий, особенно производных, имеет известные трудности.

Отметим, что выражение для определения коэффициентов передаточной функции упрощается, если оператор (2) представить как

$$L\{Y(t)\} = e^{-p\tau}\int_{\tau}^{\infty} f(t'+\tau)e^{-pt'}dt', \tag{11}$$

где t' – время включения интеграторов при $t=\tau$.

Отсчет времени в операторах (2) и (11) разный: в операторе (2) время отсчитывается от момента подачи на систему воздействия, а в операторе (11) – при достижении выходной величины рабочей точки. С учетом этого замечания между операторами (2) и (11) устанавливается следующее соотношение:

$$\int_{\tau}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = e^{-p\tau}\int_{0}^{\infty} f(t'+\tau)e^{-pt'}dt', \tag{12}$$

где $t = t' + \tau$.

Применяя оператор (11) к выражению (7), получим, что соотношение для определения коэффициентов передаточных функций упрощается: в выражении (7) исчезает сомножитель $e^{-p\tau}$. Тогда запишем

$$\begin{aligned}&(a_2 p + a_1 p + 1)\left(s_1 - s_2 p + \frac{s_3}{2} p^2 + \frac{s_4}{6} p^3 + \ldots\right) = \\ &= [a_1(1-\alpha_0) + a_2(p - \alpha_1 - \alpha_0 p)].\end{aligned} \tag{13}$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях p, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} s_1 = a_1(1-\alpha_0) - a_2\alpha_1; \\ a_1 s_1 - s_2 = a_2(1-\alpha_0); \\ a_2 s_1 - a_1 s_2 + \dfrac{s_3}{2} = 0; \\ -a_2 s_2 + a_1\dfrac{s_3}{2} - \dfrac{s_4}{6} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Из (14) представляется возможность определить a_1 и a_2 двумя путями. Первый путь – используются два первые уравнения системы (14).

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{s_2\alpha_1 - s_1(1-\alpha_0)}{\alpha_1 s_1 - (1-\alpha_0)^2}; \\ a_2 &= \frac{s_2(1-\alpha_0) - s_1^2}{\alpha_1 s_1 - (1-\alpha_0)^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Для выражения коэффициентов a_1 и a_2 с помощью уравнений (15) необходимо знать значения выходной величины и ее производную при $t = \tau$.

Если вычисление начальных условий затруднительно, то для определения a_1 и a_2 следует воспользоваться системой (14), состоящей из четырех уравнений. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{s_1 s_4 - 3 s_2 s_3}{3(s_1 s_3 - 2 s_2^2)}; \\ a_2 &= \frac{2 s_2 s_4 - 3 s_3^2}{6(s_1 s_3 - 2 s_2^2)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Реализация блока идентификации по выражению (15) представлена на рис.1.

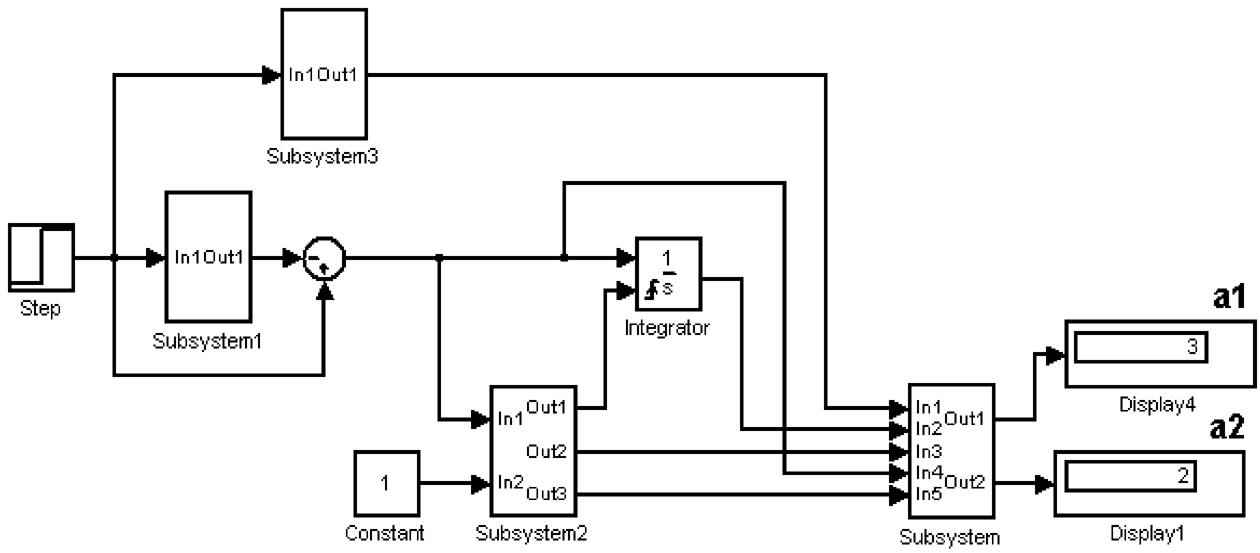

Рис.1. Функциональная схема устройства для определения коэффициентов a_1 и a_2 по выражению (15) (iden_06.mdl)

Подсистема 1 (Subsystem 1) маскирует исследуемый объект, подсистема 3 (Subsystem 3) маскирует блок, определяющий производную выходного сигнала. Подсистема 2 (Subsystem 2) формирует стробирующие сигналы, по которым запускаются интеграторы и начинается процесс определения коэффициентов a_1 и a_2. Она имеет два входа (In1 и In2) и три выхода (Out1, Out2 и Out3). На вход In1 подается сигнал, определяемый выражением $(1 - y(t))$, а на вход In2 – определяющий по времени начало рабочего участка. На выходах Out1 и Out2 формируюся стробирующие сигналы, по которым запускаются интеграторы и начинается процесс обработки кривой разгона. На выходе Out3 появляется сигнал, определяющий s_2, а на выходе интегратора (блок Integrator) – определяющий s_1. Принципиальная схема Subsystem 2 представлена на рис.2

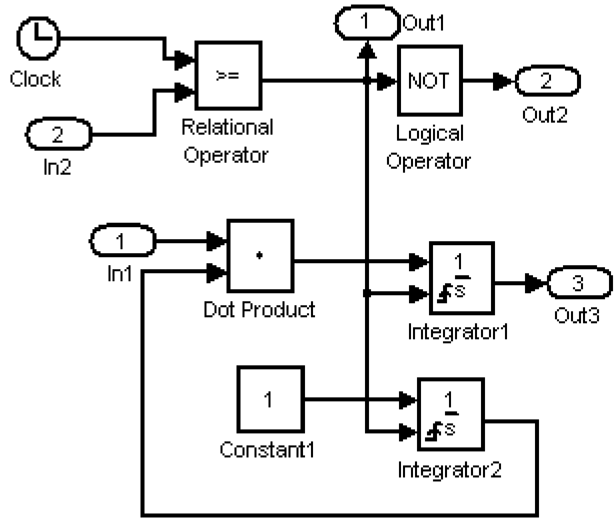

Рис.2. Принципиальная схема Subsystem 2

Блок Relational Operator формирует стробирующие сигналы. Изменение задания по выходу In2 перемещает стробирующие сигналы вдоль всей кривой разгона. Блок Dot Product определяет подинтегральное выражение интеграла s_2.

Подсистема (Subsystem) реализует преобразования, входящие в выражения (15) и определяет коэффициенты a_1 и a_2 (рис. 3).

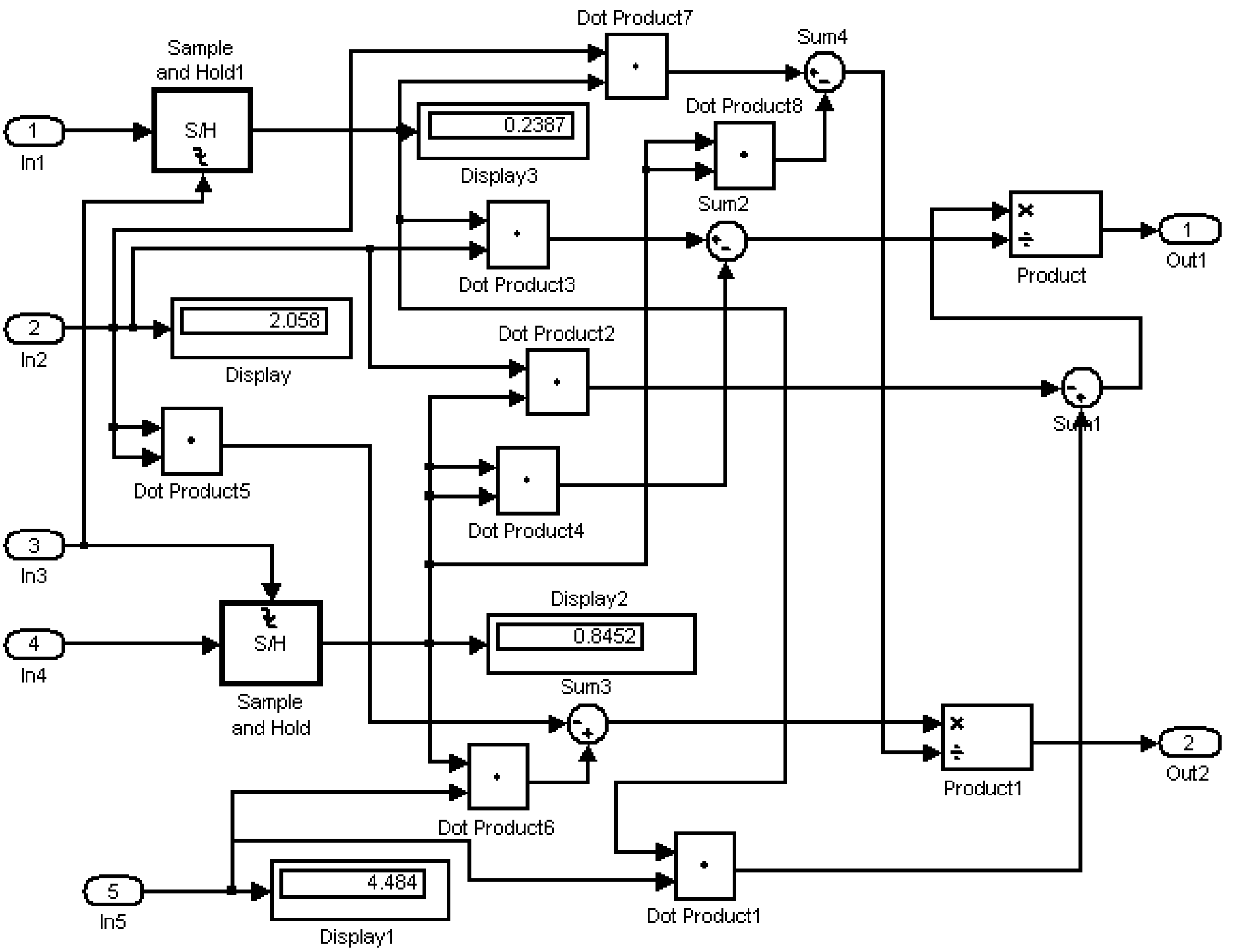

Рис.3. Принципиальная схема Subsystem

Подсистема Subsystem состоит из стандартных блоков пакета Simulink. С помощью блока Sample and Hold определяются начальные условия для выходной величины (коэффициента α_0), а с помощью блока Sample and Hold1 – для производной выходной величины (коэффициент α_1). Сумматор Sum и блоки умножения Product реализуют выражение (15). Результат вычислений представлен на соответствующих дисплеях (выход Out1 и Out2).

Принципиальная схема устройства для определения коэффициентов a_1 и a_2 по выражениям (15) и (16) представлена на рис.4. Причем, подсистема (Subsystem) определяет коэффициенты в соответствии с выражениями (15), а остальные блоки Simulink – по выражениям (16).

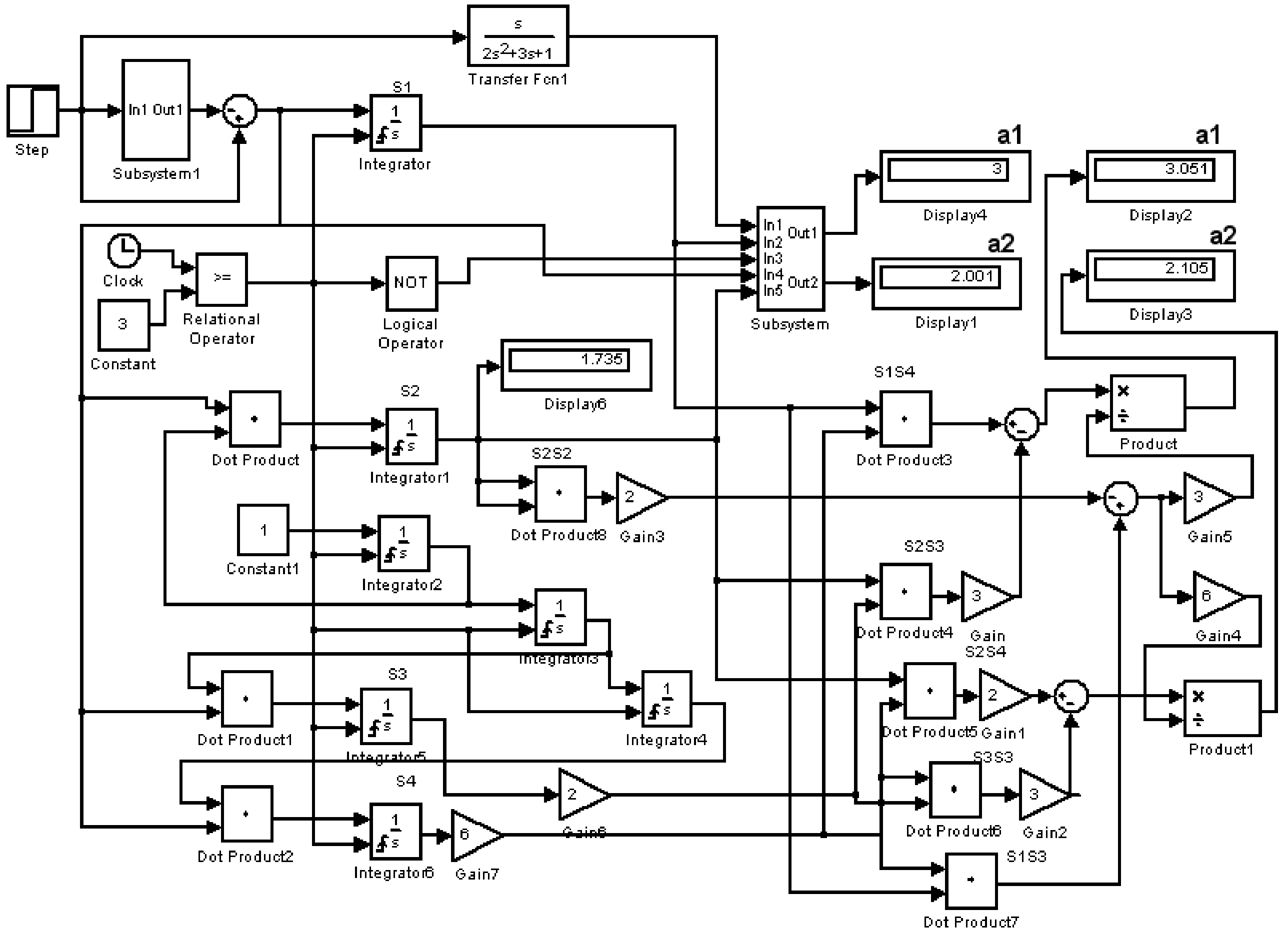

Рис.4. Принципиальная схема устройства определения коэффициентов дифференциальных уравнений двумя методами (iden_08.dml)

Для формирования функций времени, соответствующих подинтегральным выражениям (8), применен ряд последовательно соединенных интеграторов с масштабными множителями. Например, для определения s_2 ступенчатое единичное воздействие необходимо проинтегрировать дважды и умножить на 2, а для определения s_3 – проинтегрировать трижды и умножить на 6.

Результаты исследования системы второго порядка двумя методами представлены на регистрирующих блоках Display 1 – Display 4. Исключение начального участка кривой разгона задается константой блока Constant. Если корни характеристического уравнения передаточной функции объекта значительно отличаются по абсолютной величине, то увеличение времени запаздывания понижает точность определения коэффициентов передаточной функции вторым методом. Это объясняется тем, что составляющие переходного процесса, характеризующиеся большими по абсолютной величине корнями, появляются в начальной стадии кривой разгона. Увеличение запаздывания может уменьшить зону действия больших по абсолютной величине корней и поэтому точность определения коэффициентов a_1 и a_2 будет снижаться. В исследуемом примере объект характеризуется корнями $p_1 = -1$; $p_2 = -0{,}5$. При $\tau = 0{,}5$ с ошибка в определении коэффициента a_1 вторым методом составляет $0{,}5\,\%$, а

$a_2 - 1{,}1\,\%$. При $\tau = 3$ с ошибка в определении коэффициентов возросла и составила для $a_1 - 1{,}7\,\%$, а для $a_2 - 5\,\%$.

Постоянная, вносимая в блок Constant, должна выбираться из двух противоположных положений: с одной стороны, она должна быть достаточно большой, чтобы перекрыть неконтролируемое запаздывание, а, с другой, достаточно малой, чтобы не была утеряна составляющая переходного процесса, определяемая большими по абсолютной величине корнями.

Полученные формулы по определению коэффициентов передаточных функций были проверены методом моделирования в пакете MatLab. Результаты моделирования подтвердили достоверность теоретических положений и обосновали структуру устройств идентификации объектов регулирования.

Литература

"Разработка устройств для определения постоянных времени одноемкостных и двухемкостных звеньев систем автоматического регулирования": отчет о НИР №622, № ГР 74042979. – Днепропетровск, 1976.