УДК 621.3.011

В.Л.Соседка, канд. техн. наук, Р.А.Мазур
(Украина, Днепропетровск, Национальный горный университет)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОБЪЕКТА ПО ФУРЬЕ - АНАЛИЗУ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ

При наладке, исследованиях и моделировании промышленных систем необходимо знать передаточную функцию (дифференциальное уравнение) объекта регулирования, для определения которого предложено несколько методов. В инженерной практике, благодаря исключительной простоте, широкое применение получил метод моментов, основанный на определении функции $W_a(s)$, которая являющется приближением (оценкой) передаточной функции бъекта $W(s)$ при $s=0$ [1]. Равенство ограниченного числа моментов функций $W_a(s)$ и $W(s)$ при $s=0$ не гарантирует сходимости переходной функции $h_a(t)$, полученной в результате применения обратного преобразования Лапласа функции $W_a(s)$, к истинной переходной функции $h(t)$ объекта. Известно, что передаточные функции определяюся на комплексной плоскости расположением особых точек (нулей и полюсов). Если нули и полюса функции $W(s)$ находятся внутри круга сходимости, центр которого лежит в точке $s=0$, то метод моментов дает хорошее приближение, но не точное совпадение. Если же особые точки функции $W(s)$ лежат вне области сходимости, то хорошее приближение, вне зависимости от числа используемых моментов, получить невозможно.

Так как исходной информацией метода моментов является переходная функция $h(t)$ и нет информации о фактическом расположении нулей и полюсов функции $W(s)$, то для применения этого метода необходимы дополнительные исследования. Кроме того, частотный спектр ступенчатого воздействия, применяемого в методе моментов, с ростом частоты стремится к нулю. Поэтому определение коэффициентов передаточных функций объектов в полосе высоких частот (передаточные функции выше второго порядка) затруднительно из-за повышенных требований к точности вычисления моментов.

Модифицированный метод моментов с использованием подстраиваемой модели [2] в значительной степени лишен недостатков классического метода моментов. Однако его применение ограничено передаточными функциями, свойства которых определяются только полюсами. Если в передаточной функции объекта имеются и нули, то модифицированный метод моментов существенно усложняется.

Поэтому рассмотрим метод определения передаточных функций объекта по Фурье-анализу выходного сигнала. Как и в методе моментов, необходимо определить коэффициенты линейного дифференциального уравнения по анализу выходного сигнала:

$$\sum_{k=1}^{k} a_k \frac{d^k x_{вых}(t)}{dt} + x_{вых}(t) = \sum_{l=1}^{m} \frac{d^l x_{вх}(t)}{at} + x_{вх}.$$

В отличие от метода моментов в предлагаемом методе на вход объекта подается гармонический сигнал

$$x_{вх}(t) = 1 \cdot sin\,\omega t = Im(e^{j\omega t}). \qquad (1)$$

В установившемся режиме выходной сигнал объекта опишется гармоническими колебаниями с измененной амплитудой $A(\omega)$ и фазой φ

$$x_{вых}(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}(A(\omega)e^{j(\omega t+\varphi)}). \qquad т(2)$$

Применим выражения (1) и (2) для определения частного решения дифференциального уравнения второго порядка

$$a_2 \frac{d^2 x_{вых}}{at^2} + a_1 \frac{dx_{вых}}{at} + x_{вых} = x_{вх}. \qquad (3)$$

Так как входной сигнал задан, а выходной определяется по анализу экспериментальных данных, то имеется возможность записать соотношения для определения коэффициентов a_1 и a_2 по параметрам входного и выходного сигналов

$$a_2 A(\omega)(-\omega^2)[(sin(\omega t)cos\varphi + cos(\omega t)sin\varphi] + a_1 A(\omega)\omega[cos(\omega t)cos\varphi - sin(\omega t)sin\varphi] +$$
$$+ A(\omega)[sin(\omega t)cos\varphi + cos(\omega t)sin\varphi] = sin(\omega t). \qquad (4)$$

Умножим выражение (4) на $\sin(\omega t)$, а затем на $\cos(\omega t)$ и проинтегрируем их на периоде. Учитывая, что $A(\omega)\cos\varphi$ и $A(\omega)\sin\varphi$ – это проекции вектора амплитудно-фазовой характеристики исследуемого объекта на действительную и мнимую оси, то их можно определить экспериментальным путем, выполнив Фурье-анализ выходного сигнала

$$\begin{cases} A(\omega)sin\varphi = c_k = \dfrac{\omega_k}{\pi}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} x_{вых}(t)cos\,\omega_k t dt; \\ A(\omega)cos\varphi = d_k = \dfrac{\omega_k}{\pi}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} x_{вых}(t)sin\,\omega_k t dt, \end{cases} \qquad (5)$$

где ω_k – круговая частота тестового сигнала, $t_2 - t_1 = \Delta t$ – интервал времени, определяемый выражением $\Delta t = \dfrac{2\pi}{\omega_k}$.

Подставляя найденные значения c_k и d_k в (4), получим систему алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов передаточной функции

$$\begin{cases} -a_2\omega^2 d_1 - a_1\omega c_1 + d_1 = 1; \\ -a_2\omega^2 c_1 + a_1\omega d_1 + c_1 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Решая систему уравнений (6), находим, что

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{c_1}{\omega(d_1^2 + c_1^2)}; \\ a_2 = \dfrac{d_1^2 + c_1^2 - d_1}{\omega^2(d_1^2 + c_1^2)}. \end{cases} \tag{7}$$

Методика определения коэффициентов передаточных функций по Фурье-анализу выходного сигнала была проверена в результате моделирования в пакете Matlab. В модели (рис.1) на вход объекта, описываемого передаточной функцией второго порядка, подаются гармонический и постоянный сигналы. Величина постоянного сигнала выбрана таким образом, чтобы, во-первых, исключить изменение полярности выходного сигнала, а, во-вторых, исключить работу системы в нелинейной зоне. Значения c_1 и d_1 определются в соответствии с выражением (5). Для уменьшения ошибки при определении c_1 и

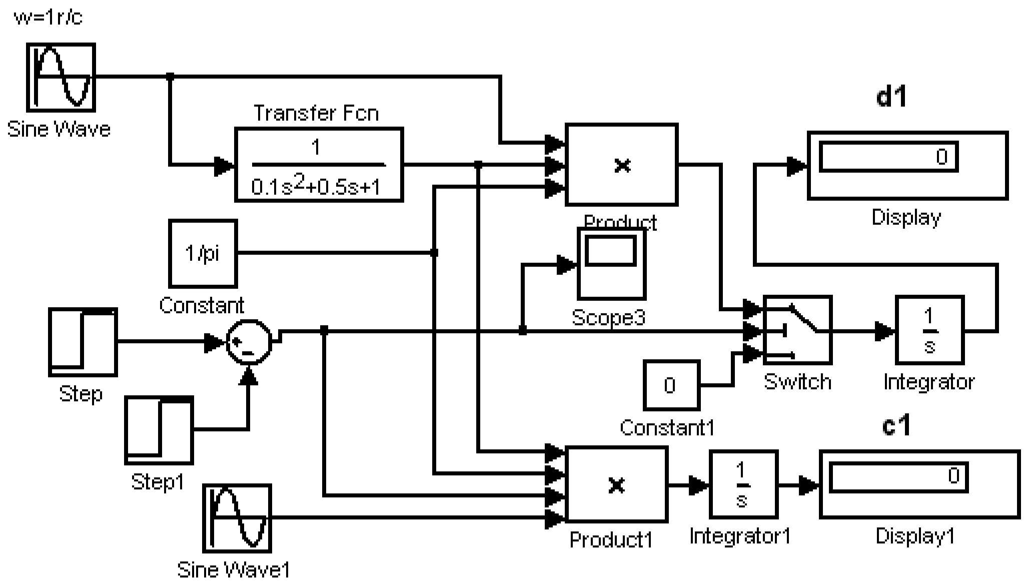

Рис. 1. Схема устройства для определения коэффициентов передаточных функций по Фурье анализу выходного сигнала

d_1 интегратор включается на время, равное периоду тестовой частоты в установившемся режиме. По измеренным c_1 и d_1 и известной частоте ω в соответствии с выражением (7) определяются коэффициенты a_1 и a_2. Исходные данные системы уравнений - это проекции вектора амплитудно-фазовой характеристики на действительную (коэффициент d_1) и мнимую (коэффициент c_1) оси координат. Подставив полученные значения коэффициентов c_1 и d_1 в выражение (7), определяем коэффициенты передаточных функций.

При усложнении объекта регулирования (передаточная функция при отсутствии нулей имеет более двух полюсов) методика определения коэффициентов передаточной функции остается прежней, но число уравнений должно увеличиться, так как увеличилось число неизвестных. Это достигается путем определения коэффициентов Фурье на нескольких частотах. Например, для передаточной функции четвертого порядка Фурье-анализ выходного сигнала следует выполнить на двух частотах. Общие соображения по выбору частот рассмотрены ниже.

Усложнение объекта может происходить за счет нулей передаточных функций, т.е. появления полинома числителя

$$W(s) = \frac{b_1 s + 1}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}. \qquad (8)$$

Определяя выходной сигнал в установившемся режиме, получаем новую систему уравнений

$$\begin{cases} -a_2\omega_1^{\ 2} d_1 - a_1\omega_1 c_1 + d_1 = 1; \\ -a_2\omega_1^{\ 2} c_1 + a_1\omega_1 d_1 + c_1 = b_1\omega_1; \\ -a_2\omega_2^{\ 2} d_2 + a_1\omega_2 c_1 d_2 = 1, \end{cases} \qquad (9)$$

у которой число неизвестных коэффициентов передаточной функции равно трем, а количество уравнений при двух частотах равно четырем. Если требуется повышенная точность для определения коэффициентов числителя, то следует оставить два уравнения, в правой части которых находится коэффициент b_1.

Исходные данные для системы уравнений (9) получены при моделировании структурной схемы (рис.2), с помощью которой определены проекции вектора амплитудно-фазовой характеристики на действительную (коэффициенты d_1 и d_2) и мнимую (коэффициент c_1) оси координат. Подставив полученные значения c_1, d_1 и d_2 в выражение (9), определяем коэффициенты передаточных функций (8) по Фурье-анализу выходных сигналов.

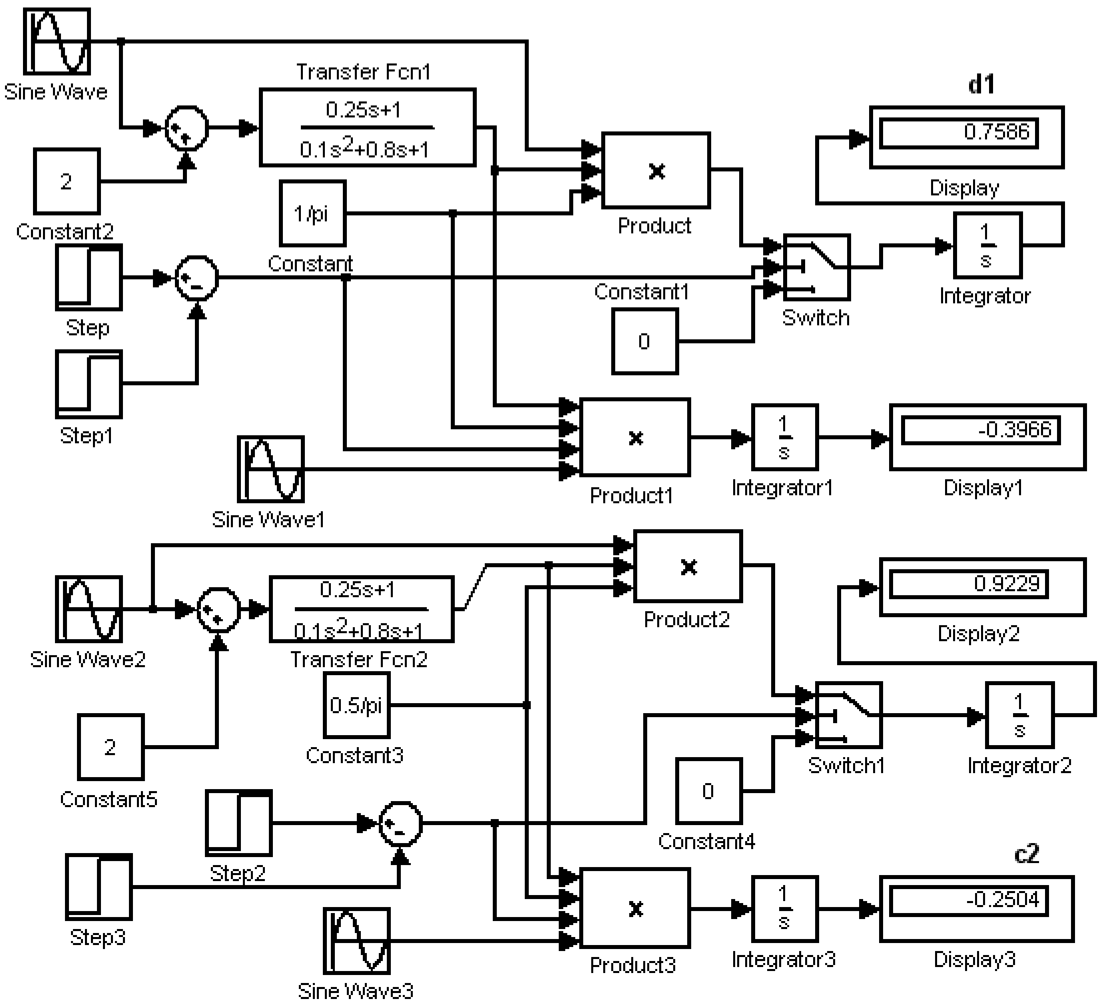

Рис. 2. Схема определения коэффициентов передаточной функции общего вида

Результаты моделирования подтвердили теоретические положения и возможность определения коэффициентов передаточных функций общего вида.

Вопрос о выборе диапазона оптимальных частот, обеспечивающих устойчивость решения системы уравнений (6) и (9), зависит от сложности объекта регулирования (порядок полинома знаменателя) и вида его передаточной функции (характеризуется ли объект передаточной функции только полюсами (3) или нулями и полюсами (8)) и требует дополнительных исследований. Предварительные исследования показали, что для передаточной функции второго порядка наименьшая погрешность в определении коэффициентов a_1 и a_2 наблюдается в диапазоне частот, создающий фазовый сдвиг в 60-75^0. В этом случае 10%-я погрешность в определении коэффициентов Фурье c, d и задании тестовой частоты ω приводит к 10%-й погрешности в определении коэффициентов a_1 и a_2. Если фазовый сдвиг не лежит в указанных пределах, то для обеспечения 10%-й погрешности в определении коэффициентов передаточных функций точность задания частоты и точность определения коэффициентов Фурье должна быть повышена.

При увеличении сложности объекта приходится определять три и более коэффициентов передаточных функций. Поэтому исследования проводятся при двух (ω_1, ω_2) или трех $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ частотах, которые можно последовательно подать на объект или синтезировать из этих частот полигармонический сигнал. Исходя из общих соображений к частотам ω_1 и ω_2 можно предъявить следующие требования. Частота ω_1 должна обеспечивать фазовый сдвиг в 40-60^0, что позволит определять коэффициенты c_1 и d_1 с одинаковой точностью и избежать плохой обусловленности матриц, появляющихся при решении алгебраических уравнений. Частота ω_2 выбирается из двух противоречивых положений. С одной стороны, она должна быть достаточно высокой, чтобы обеспечить фазовый сдвиг в 120-150^0, который повысит устойчивость алгоритма решения алгебраических уравнений, а, с другой стороны, она не должна уменьшать амплитуду выходного сигнала до величины соизмеримой с шумами. Если при сдвиге в 120-150^0 амплитуда выходного сигнала уменьшиться до недопустимой величины, то ее следует увеличить за счет понижения частоты ω_2.

Несмотря на значительное число работ, посвященных методам идентификации, в практике, благодаря своей исключительной простоте, применяется, в основном, метод моментов (площадей). Однако он требует повышенной точности, и неизбежные малые ошибки эксперимента приводят к значительным ошибкам в определении коэффициентов передаточных функций.

Предлагаемый метод в значительной степени лишен этих недостатков: путем выбора тестовой частоты коэффициенты передаточных функций определяются с одинаковой точностью. Кроме того, подавая на объект несколько частот, можно получить больше уравнений, чем неизвестных, что позволяет определять коэффициенты передаточных функций, усредняя результаты расчетов.

Список литературы

1. Разработка устройств для определения постоянных времени одно и двухемкостных звеньев систем автоматического регулирования: Отчет о НИР / Днепропетровский горный институт (ДГИ); руководитель В.Л.Соседка. – № ГР 74042979. –Д., 1976
2. Соседка В.Л., Мазур Р.А. Определение коэффициентов дифференциальных уравнений объекта с использованием модели // Гірн. електромеханіка та автоматика: Наук.- техн.зб.- 2006.- Вип.76., с. 92-99.