

**Ю.В. Жихарев***(Україна, Дніпропетровськ, Національний гірничий університет)*

## ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОТИ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ВАЖКОЇ КУЛЬКИ ПРИ ЗНАХОДЖЕННІ ГЛОБАЛЬНИХ ОПТИМУМІВ БЕЗПЕРЕРВНИХ ТА КУСКОВО-СТАЛИХ ФУНКЦІЙ

### Вступ

У сучасних умовах перед розробниками будь-якого проекту завжди виникає проблема обмеженості необхідних ресурсів для його реалізації, що пояснюється його економічною доцільністю. Для оптимізації параметрів проекту використовуються так звані задачі оптимізації. Для їх розв'язання розроблено багато методів, але в силу різноманітності таких задач та певних недоліків самих методів проблема розробки нових методів за останні роки стала ще більш актуальною.

При розробці систем автоматичної оптимізації та автоматизованого проектування однією з головних є проблема знаходження глобального екстремуму критерію якості. Один із методів, що використовується у подібних випадках – метод важкої кульки [1]. У роботах [2, 3] цей метод було модифіковано на базі застосування концепцій симетрії та паралельного простору. Запропонований підхід призначений для пошуку глобального екстремуму функції  $f(x)$  зі складним рельєфом поверхні у випадках, коли вона є безперервною, кусково-сталою або має як кусково-сталі фрагменти, так і частини, що монотонно зростають або зменшуються.

### Синтез алгоритму пошуку екстремуму цільової функції

Суть методу полягає в тому, що для знаходження екстремуму безперервної на визначеному інтервалі  $[a;b]$  цільової функції  $f(x)$  з векторним аргументом  $x$  будується допоміжна функція

$$F(y, z) = 0,5((y - z)^T Q(y - z) + f(y) + f(z)), \quad (1)$$

яка є симетричною відносно векторних змінних  $y$  та  $z$ . У виразі (1) матриця  $Q$  є позитивно визначеною, а вектори змінних  $y$  та  $z$  мають таку ж розмірність, що і вектор  $x$ . Екстремум функції (1) буде при  $y = z = x^*$ , де  $x^*$  – величина векторного аргументу  $x$ , при якому функція  $f(x)$  приймає екстремальне значення. Рух до екстремуму допоміжної функції  $F(y, z)$  здійснюється методом важкої кульки, шляхом зміни  $y$  та  $z$ .

У випадку кусково-сталої або комбінації кусково-сталої та безперервної функції  $f(x)$  до допоміжної функції  $F(y, z)$  з метою нахилу кусково-сталіх фрагментів у ній, що необхідно для руху важких кульок для зближення у точці глобального оптимуму  $x^*$ , додається доданок  $R(y + z)$ , і допоміжна функція набу-

ває вигляду

$$F(y, z) = 0,5((y - z)^T Q(y - z) + f(y) + f(z)) + R(y + z), \quad (2)$$

де  $R$  – вектор-рядок, складові якого можуть змінюватись у досить широкому діапазоні.

Іншими словами, якщо складова  $0,5 \cdot (y - z)^T Q(y - z)$  функції  $F(y, z)$  забезпечує зближення значень векторів  $y$  та  $z$ , то складова  $R(y + z)$  несе відповідальність за коливання поверхні цієї функції.

Під час коливання поверхні функції  $F(y, z)$  і відбувається рух важкої кульки до екстремальної точки функції  $f(x)$ .

Відповідно модифікований алгоритм методу важкої кульки, що рухається до мінімуму  $F(y, z)$ , буде такий:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ z \end{bmatrix} + \nu \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ z \end{bmatrix} + \text{grad}F(y, z) = 0, \quad (3)$$

де  $m$  – маса важкої кульки;  $\nu$  – в'язкість середовища, в якому рухаються кульки.

### Результати тестування синтезованого алгоритму

Апробація наведеного алгоритму була здійснена на декількох спеціально визначених тестових функціях, головною умовою для яких була наявність складного рельєфу поверхні. Прикладом такої функції є функція однієї змінної

$$f(x) = k \cdot (x - a)^2 + b - c \cdot \cos(2\pi x), \quad (4)$$

Графік функції (4) при  $k = 0,2$ ,  $a = 4$ ,  $b = 3$  і  $c = 2$  наведений на рис. 1, а поверхня допоміжної функції для неї – на рис. 2. З рис. 1 видно, що цільова функція має багато коливань з високими амплітудами та частотою в околиці глобального мінімуму, який знаходиться у точці  $x^* = 4$ . Традиційні методи для пошуку глобального екстремуму цієї функції та аналогічних їй, наприклад, алгоритм градієнтного методу найшвидшого спуску чи метод важкої кульки в класичному вигляді або взагалі непридатні до використання, або закінчуються в локальних оптимумах, розташованих навколо глобального.

Однак, застосовуючи реалізацію процедури розпаралелювання процесу пошуку екстремуму  $f(x)$  через взаємодію аргументів  $y$  та  $z$  допоміжної симетричної функції, легко отримуємо глобальний екстремум (рис. 3). При цьому траєкторія руху важкої кульки (рис. 4) також доводить, що процес пошуку глобального екстремуму збігається до точки глобального оптимуму.

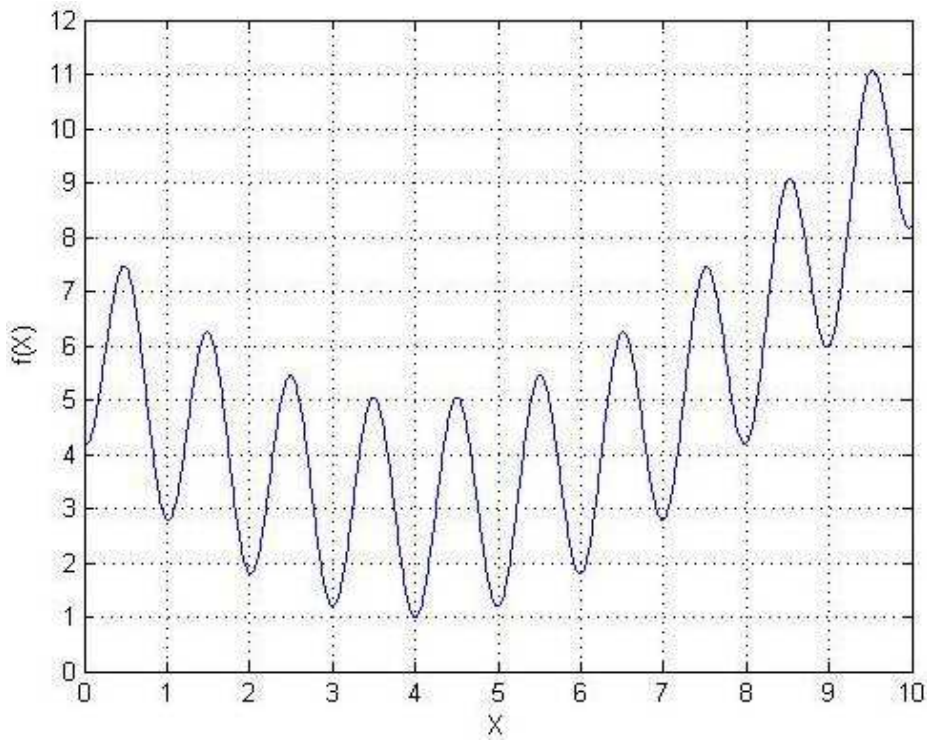


Рис. 1. Графік тестової функції (4) при  $k = 0,2$ ,  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$

Як засвідчили дослідження, траєкторія руху важкої кульки повністю відповідає поведінці цільової функції та важких кульок – точок, що зображують –  $y(t)$  та  $z(t)$ . Наприклад, при збільшенні параметра  $c$  (амплітуди коливань) вигляд цільової функції ускладнюється, відповідно і важкі кульки більшу кіль-

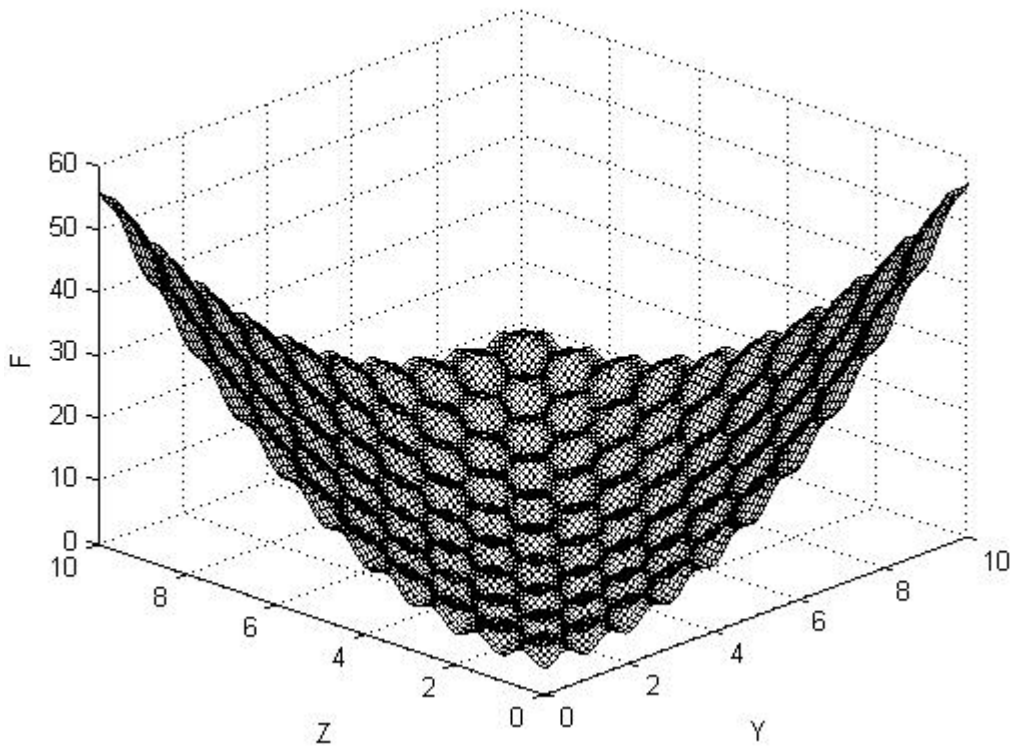


Рис. 2. Графік поверхні  $F(y, z)$  для цільової функції (4)

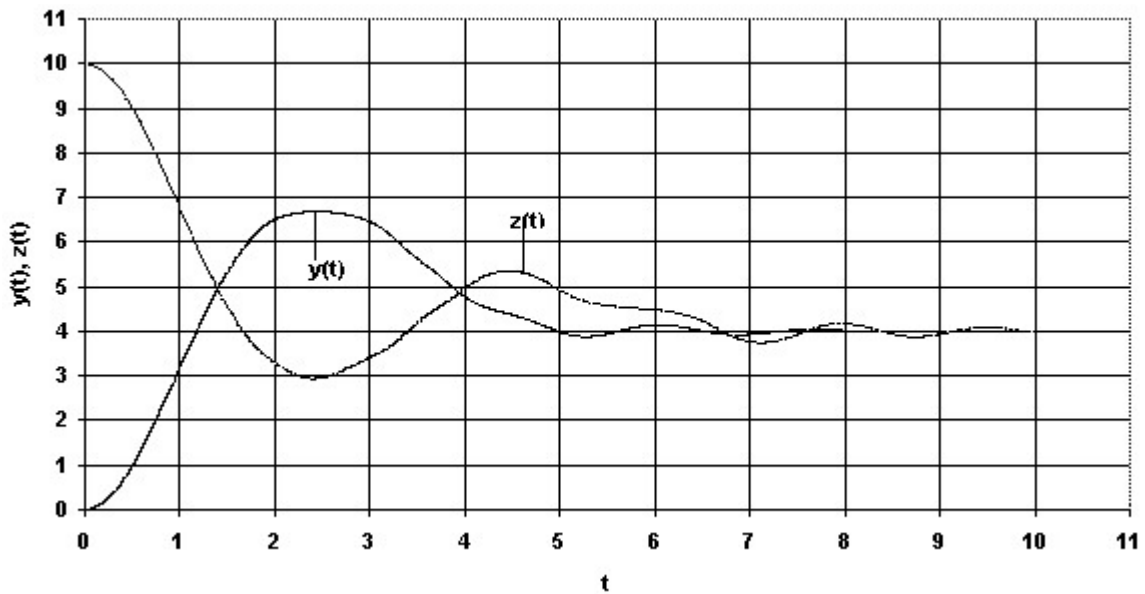


Рис. 3. Процес збігання запропонованого методу до точки глобального екстремуму безперервної функції (4)

кість разів перетинають точку глобального оптимуму, перш ніж зійдуться в ній остаточно, а траєкторія їх руху стає більш складною – вони дедалі більше прокочуються від глобального екстремуму, а потім, повертаючись, багато коливаються в локальних, перш ніж опиняться там, де треба. І відповідно, при зменшенні амплітуди коливань, усі ці процеси навпаки спрощуються.

Для того щоб краще зрозуміти сутність методу важкої кульки, модифікованого на базі концепції симетрії, розглянемо елементи дослідження ще однієї тестової функції, яка є кусково-сталою:

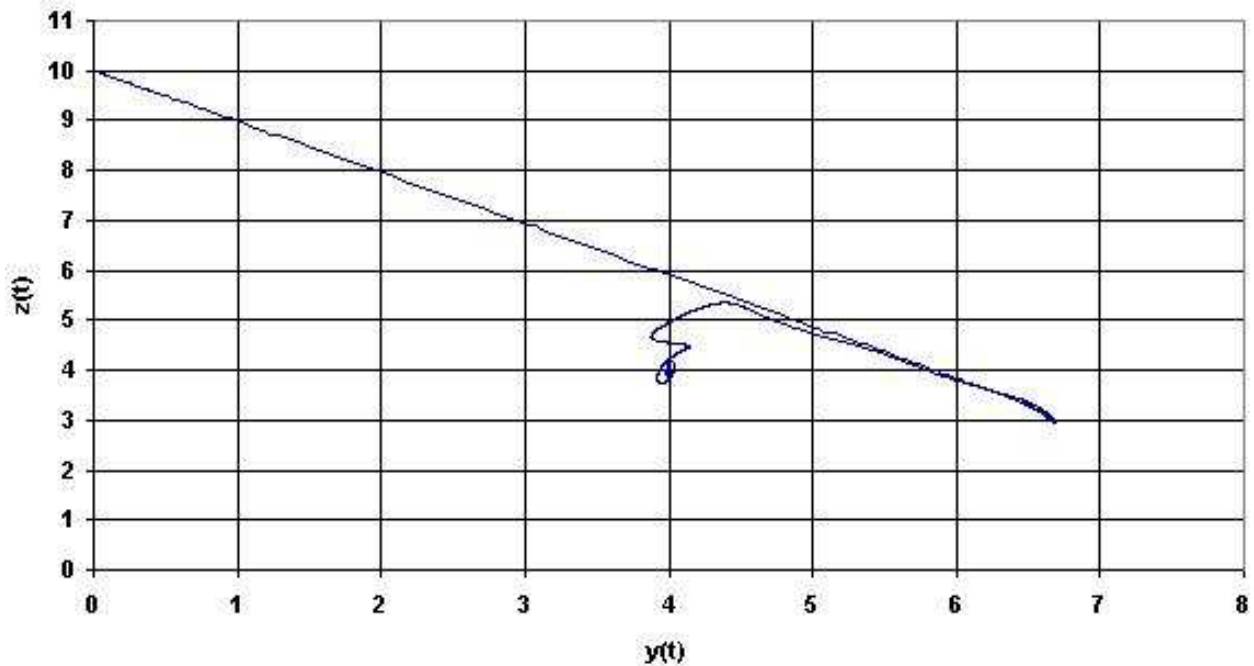


Рис. 4. Траєкторія руху важкої кульки на шляху до глобального екстремуму тестової безперервної функції (4)

$$f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 1, \quad x \geq 6 \\ 2, & 1 \leq x < 2, \quad 4 \leq x < 5 \\ 0, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x < 4 \\ 3, & 5 \leq x < 6 \end{cases} \quad (5)$$

Графік даної функції та елементи допоміжної функції (2) для неї – поверхні функцій  $0,5(f(y) + f(z))$ ,  $0,5 \cdot Q(y - z)^2$  та  $R(y + z)$  наведені на рис. 5.

З нього видно, що глобальний оптимум функції (5) має місце, коли  $x \in [2;3]$ , перший доданок функції (2) використовується для отримання моделі цільової функції у просторі (рис. 5б), другий – для деформації отриманої моделі та забезпечення зближення значень векторів  $y$  та  $z$  (рис. 5в), третій – для нахилу всієї конструкції, тобто сходинок кусково-сталої цільової функції вздовж лінії  $z = y$  (рис. 5г). У результаті важка кулька котиться з однієї нахиленої площинки на іншу, а не стоїть на місці.

Тут необхідно розглянути специфіку використання запропонованого алгоритму для пошуку глобального екстремуму кусково-сталих функцій. Так як у системі диференційних рівнянь (3) необхідно розрахувати градієнт допоміжної функції (2), а для кусково-сталої функції градієнт дорівнює нулю на горизонтальних ділянках, то замість функції (2) в систему (3) фактично підставляємо функцію, яка зображена на рис. 5б, внаслідок чого отримуємо точку  $(\tau; d)$ , до якої симетрично збігаються криві  $y(t)$  та  $z(t)$ . Ця точка не є точкою глобального екстремуму, але за її допомогою можна вирішити наступну задачу Коші, розв'язок якої дає змогу визначити глобальний оптимум. Ця задача має вигляд

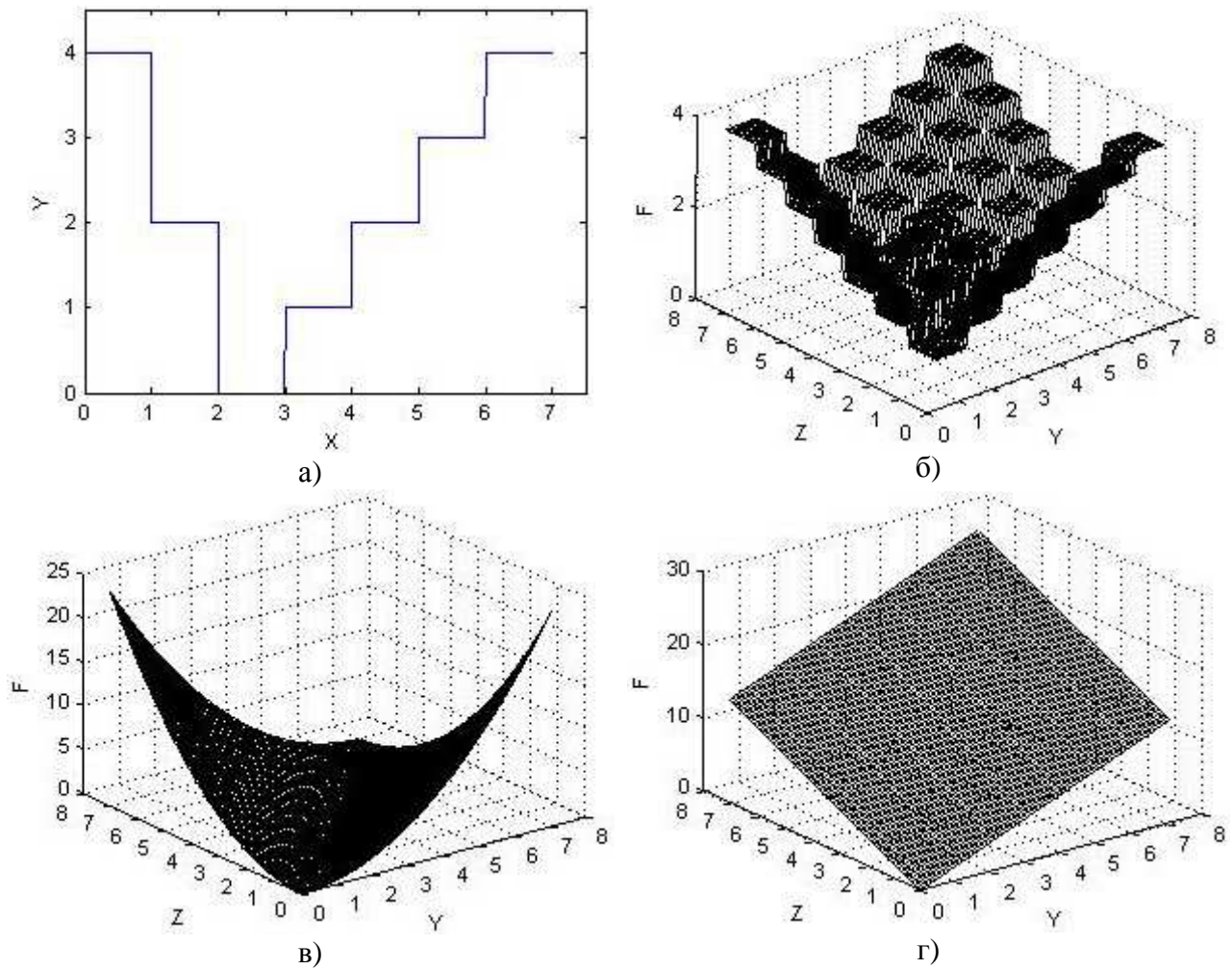


Рис. 5. Графік кусково-сталої тестової функції (5)

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ z \end{bmatrix} + \frac{v}{m} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ z \end{bmatrix} + \frac{R}{m} = 0, \quad y(\tau) = z(\tau) = d, \quad y'(\tau) = z'(\tau) = 0. \quad (6)$$

Фактично ця система становить собою одне диференційне рівняння другого порядку, бо усі її рівняння однакові. Її розв'язання при правильному підборі величини коливань  $R$  та маси важкої кульки  $m$  збігається до точки, ордината якої є глобальним оптимумом, аналогічно тому, як це показано на рис. 3 для безперервної функції (4).

### Висновки

За результатами проведених досліджень бачимо, що з часом запропонований алгоритм, який представляє собою об'єднання методів встановлення та концепції симетрії, сходиться до глобального оптимуму багатоекстремальної функції зі складним рельєфом поверхні.

Таким чином, наведена методика пошуку глобального екстремуму функції, заснована на концепції симетрії, є працездатною і має гарну збіжність. Про це говорять і результати її практичного застосування в задачах адаптивної ідентифікації об'єктів управління й автоматизованого проектування різних пристро-

### Список літератури

1. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1973. – 632 с.
2. Корсун В.И., Жихарев Ю.В. Поиск глобального экстремума функции с помощью основанного на принципе симметрии взаимодействия двух тяжелых шариков // Гірничча електромеханіка та автоматика: Наук.-техн. зб. – 2005. – Вип. 75. – С. 80-86.
3. Корсун В.І., Жихарев Ю.В. Удосконалення методу важкої кульки на основі використання концепції симетрії та паралельного простору // Сб. науч. тр. II междунар. радиоэлектронного форума «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития» (МРФ'2005). – Харьков: АНПРЭ, ХНУРЭ, 2005. –Т. 3. – С. 338-341.