УДК 621.3.011.71

А.В. Кожевников, канд. техн. наук, Г.Е. Денисова
(Украина, Днепропетровск, Национальный горный университет)

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОНТАКТНОЙ СЕТИ ПОСТОЯННОГО ТОКА ПРИ НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

В настоящее время при анализе аварийных режимов работы электрических сетей общепринятым является подход, в котором распределенные параметры сети заменяются сосредоточенными [1]. Такой подход позволяет получить удовлетворительные результаты при расчете установившихся режимов, однако зачастую неприемлем для анализа переходных процессов для протяженных линий электропередачи и контактных сетей. Между тем основным видом помех, снижающих устойчивость функционирования средств защиты, являются помехи, возникающие при коммутациях мощных электропотребителей. В то же время современной тенденцией развития защитных систем электроснабжения от токов коротких замыканий и утечек является создание многопараметрических средств, реагирующих и на параметры переходных процессов при возникновении аварийных ситуаций [2]. Таким образом, развитие методов анализа переходных процессов в электрических цепях с распределенными параметрами – актуальная задача.

Наиболее распространенными и перспективными для анализа переходных процессов в цепях с распределенными параметрами являются методы, основанные на операторном подходе [3]. Данный подход позволяет приводить систему дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих зависимости напряжений и токов в цепи от времени и пространственной координаты, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно изображений напряжений и токов. При нулевых начальных условиях указанная система сводится к двум независимым однородным уравнениям, для которых могут быть получены общие аналитические решения [3]. В случае ненулевых начальных условий уравнения являются неоднородными и их аналитические решения определяются видом возмущающих функций.

Переход от полученных решений–изображений напряжений и токов к их функциям–оригиналам в аналитическом виде возможен только в том случае, если изображения представляют собой дробно-рациональные функции или являются линейными комбинациями изображений, оригиналы которых табулированы [4]. Для других видов изображений переход к оригиналам возможен с применением численных методов обратного преобразования Лапласа [4 – 6], которые однако предполагают аналитическое представление обращаемого изображения. Алгоритм, описанный в работе [5], реализован в виде расширения Toolbox среды математических расчетов MATLAB. В статье [6] проанализированы переходные процессы в длинных линиях при нулевых начальных условиях, определены ограничения, накладываемые на параметры цепи, при которых изображения напряжений и токов являются мероморфными функциями, а также предложен метод обращения таких изображений.

Целью работы – разработка операторного метода анализа переходных процессов в контактной сети постоянного тока при ненулевых начальных условиях.

В операторном виде система волновых уравнений для длинной линии при ненулевых начальных условиях имеет вид [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U(x,p)}{dx^2} = Z_0[Y_0U(x,p) - C_0U(x,0)] + L_0\dfrac{dI(x,0)}{dx}; \\ \dfrac{d^2I(x,p)}{dx^2} = Y_0[Z_0I(x,p) - L_0I(x,0)] + C_0\dfrac{dU(x,0)}{dx}. \end{cases} \tag{1}$$

где $Z_0 = pL_0 + R_0$, $Y_0 = pC_0 + G_0$, а C_0, G_0, L_0, R_0 – соответственно емкость, проводимость, индуктивность и сопротивление единицы длины линии; $U(x,p)$, $I(x,p)$ – изображения напряжения и тока в точке линии с координатой x.

Функции начальных условий $I = I(x,0)$, $U = U(x,0)$ для длинной линии, подключенной вначале к источнику постоянного напряжения с ЭДС E_g и внутренним сопротивлением R_g и нагруженной в конце на сопротивление R_1, определяются из системы волновых уравнений для стационарного случая, где производные тока и напряжения по времени равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U(x,0)}{dx^2} = R_0G_0U(x,0); \\ \dfrac{d^2I(x,0)}{dx^2} = R_0G_0I(x,0). \end{cases} \tag{2}$$

Общие решения уравнений (2) имеют вид:

$$\begin{cases} U(x,0) = K_1\exp(l\,x) + K_2\exp(-l\,x); \\ I(x,0) = K_3\exp(l\,x) + K_4\exp(-l\,x). \end{cases} \tag{3}$$

где $l = \sqrt{R_0G_0}$. При определении граничных условий, позволяющих вычислить значения коэффициентов K_1 – K_4, используется выражение для сопротивления двухполюсника $R(x)$, представляющего собой линию длиной x и нагруженную на сопротивление величиной R_l:

$$
\begin{cases}
R(x) = a\dfrac{\dfrac{a+R_l}{a-R_l}\exp(2\,l\,x)-1}{\dfrac{a+R_l}{a-R_l}\exp(2\,l\,x)+1} \quad \text{при} \quad a > R_l; \\[2ex]
R(x) = a\dfrac{1+\dfrac{R_l-a}{R_l+a}\exp(-2\,l\,x)}{1-\dfrac{R_l-a}{R_l+a}\exp(-2\,l\,x)} \quad \text{при} \quad a \le R_l,
\end{cases} \tag{4}
$$

где $a = \sqrt{R_0 / G_0}$. Формулы (4) представляют собой частные случаи известного соотношения для определения сопротивления длинной линии на переменном токе, где коэффициенты при экспонентах носят названия коэффициентов отражения. Значения коэффициентов $K_1 - K_4$ могут быть определены из систем линейных уравнений:

$$
\begin{cases}
K_1 + K_2 = U(0,0) = \dfrac{E_g R(l)}{R(l)+R_g}; \\[2ex]
l\,K_1 - l\,K_2 = \left.\dfrac{dU(x,0)}{dx}\right|_{x=0} = -R_0 I(0,0) = -\dfrac{E_g R_0}{R(l)+R_g};
\end{cases} \tag{5а}
$$

$$
\begin{cases}
K_3 + K_4 = I(0,0) = \dfrac{E_g}{R(l)+R_g}; \\[2ex]
l\,K_3 - l\,K_4 = \left.\dfrac{dI(x,0)}{dx}\right|_{x=0} = -G_0 U(0,0) = -\dfrac{E_g R(l) G_0}{R(l)+R_g},
\end{cases} \tag{5б}
$$

где l – длина линии. Их решения имеют следующий вид:

$$
K_1 = \frac{E_g(\,l\,R(l)-R_0)}{2\,l\,(R(l)+R_g)}; \;\; K_2 = \frac{E_g(\,l\,R(l)+R_0)}{2\,l\,(R(l)+R_g)}; \;\; K_3 = -\frac{K_1}{a}; \;\; K_4 = \frac{K_2}{a}. \tag{6}
$$

С учетом выражений (3) система уравнений (1) может быть записана так:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2U(x,p)}{dx^2} = Z_0Y_0U(x,p) - (Z_0C_0 + L_0G_0)(K_1\exp(\,l\,x) + K_2\exp(-\,l\,x)); \\[2ex]
\dfrac{d^2I(x,p)}{dx^2} = Z_0Y_0I(x,p) - (Y_0L_0 + C_0R_0)(K_3\exp(\,l\,x) + K_4\exp(-\,l\,x)).
\end{cases} \tag{7}
$$

Данные уравнения – обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка, где возмущающие функции представляются линейными комбинациями экспоненциальных функций. Общие решения (7) следующие:

$$\begin{cases} U(x,p) = A_1 \exp(g\,x) + A_2 \exp(-g\,x) + B_1 \exp(l\,x) + B_2 \exp(-l\,x); \\ I(x,p) = -\dfrac{A_1}{Z_W} \exp(g\,x) + \dfrac{A_2}{Z_W} \exp(-g\,x) + B_3 \exp(l\,x) + B_4 \exp(-l\,x), \end{cases} \tag{8}$$

где $Z_W = \sqrt{(pL_0 + R_0)/(pC_0 + G_0)} = \sqrt{Z_0 / Y_0}$ – операторное волновое сопротивление; $g = \sqrt{(pL_0 + R_0)(pC_0 + G_0)} = \sqrt{Z_0 Y_0}$ – операторный коэффициент распространения. Члены с коэффициентами $A_1 - A_2$ представляют собой общие решения однородных уравнений, соответствующих системе (7) [3], а с коэффициентами $B_1 - B_4$ – частные решения неоднородных уравнений. Значения $\{B_i\}_{i=1,..,4}$ определяются путем подстановок членов–решений в уравнения (7), где возмущающие функции представляются экспонентами с теми же показателями:

$$l^2 B_i \exp[(-1)^{i+1}\,l\,x] = g^2 B_i \exp[(-1)^{i+1}\,l\,x] - K_i (Z_0 C_0 + L_0 G_0) \exp[(-1)^{i+1}\,l\,x]; \tag{9}$$

$$B_i = \frac{K_i (Z_0 C_0 + L_0 G_0)}{g^2 - l^2} = \frac{K_i (Y_0 L_0 + C_0 R_0)}{g^2 - l^2} = \frac{K_i}{p}, \tag{10}$$

где величины $\{K_i\}_{i=1,...,4}$ – действительные и определяются соотношениями (5 а, б).

Опуская промежуточные вычисления, аналогичные тем, которые применяются при нулевых начальных условиях [3], для изображений напряжения и тока при ненулевых условиях окончательно можно записать:

$$\begin{aligned} U(x,p) = {} & U_l(p)\left[\operatorname{ch}(g\,(l-x)) + \frac{Z_W}{Z_l} \operatorname{sh}(g\,(l-x)) \right] + \frac{1}{p}\Big\{ K_1 \big[\exp(l\,x) - \\ & - \operatorname{ch}(g\,(l-x)) \exp(l\,l)\big] + K_2 \big[\exp(-l\,x) - \operatorname{ch}(g\,(l-x)) \exp(-l\,l)\big] - \\ & - Z_W \operatorname{sh}(g\,(l-x)) \big[K_3 \exp(l\,l) + K_4 \exp(-l\,l)\big] \Big\}; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} I(x,p) = {} & U_l(p)\left[\frac{1}{Z_l} \operatorname{ch}(g\,(l-x)) + \frac{1}{Z_W} \operatorname{sh}(g\,(l-x)) \right] + \frac{1}{p}\Big\{ K_3 \big[\exp(l\,x) - \\ & - \operatorname{ch}(g\,(l-x)) \exp(l\,l)\big] + K_4 \big[\exp(-l\,x) - \operatorname{ch}(g\,(l-x)) \exp(-l\,l)\big] - \\ & - \frac{1}{Z_W} \operatorname{sh}(g\,(l-x)) \big[K_1 \exp(l\,l) + K_2 \exp(-l\,l)\big] \Big\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $U_l(p)$ обозначено изображение напряжения на нагрузке, которое определяется как

$$
\begin{aligned}
&U_l(p)=\{E_g(p)-\frac{1}{p}[K_1\left(1-\mathrm{ch}(g\,l)\exp(l\,l)-\frac{Z_g}{Z_W}\mathrm{sh}(g\,l)\exp(l\,l)\right)+K_2\times\\
&\times\left(1-\mathrm{ch}(g\,l)\exp(-l\,l)-\frac{Z_g}{Z_W}\mathrm{sh}(g\,l)\exp(-l\,l)\right)+K_3\left(Z_g(1-\mathrm{ch}(g\,l)\exp(l\,l))-\right.\\
&\left.-Z_W\,\mathrm{sh}(g\,l)\exp(l\,l)\right)+K_4\left(Z_g(1-\mathrm{ch}(g\,l)\exp(-l\,l))-Z_W\,\mathrm{sh}(g\,l)\exp(-l\,l)\right)]\}\times\\
&\times\left[\left(1+\frac{Z_g}{Z_l}\right)\mathrm{ch}(g\,l)+\left(\frac{Z_W}{Z_l}+\frac{Z_g}{Z_W}\right)\mathrm{sh}(g\,l)\right]^{-1},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $E_g(p)$ – изображение напряжения источника; Z_g, Z_l – операторные сопротивления источника и нагрузки.

В работе [6] показано, что при нулевых начальных условиях для линии без искажений, когда $E_g(p)$ является дробно-рациональной функцией, изображения $U(x,p)$ и $I(x,p)$ – мероморфны и имеют конечное число полюсов, а также предложен численный метод для нахождения их оригиналов. Члены, обуславливающие ненулевые начальные условия, в выражения (11) – (13) входят аддитивно и являются дробно-рациональными функциями. Следовательно, при выполнении указанных ограничений $U(x,p)$ и $I(x,p)$ также будут представлять собой мероморфные функции с конечным числом полюсов и для их обращения может быть применен упомянутый выше метод.

При тестировании соотношений (11) – (13) были рассмотрены частные случаи, допускающие относительно простые аналитические решения.

Так, для линии без искажений, которая в установившемся режиме в своем начале была подключена к источнику постоянного напряжения и работала на холостом ходу, а при коммутации была замкнута накоротко в своем начале, решение относительно напряжения может быть получено из выражения (8) с использованием граничных условий $U(0,p)=0$, $I(l,p)=0$:

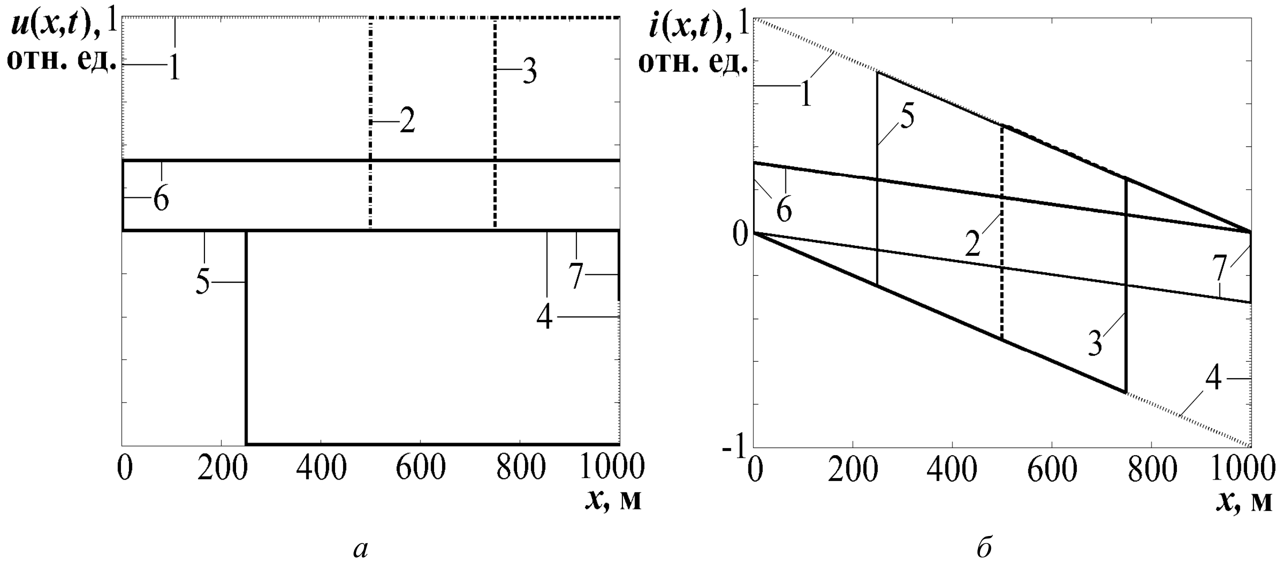
$$
\begin{aligned}
&u(x,t)=\left[K_1\exp(l\,x)+K_2\exp(-l\,x)\right]1(t)-\left(K_1+K_2\right)\exp(-l\,x)1\left(t-\frac{x}{v}\right)-\\
&-Z_W\left[K_3\exp(-l\,x)+K_4\exp(-l\,(2l+x))\right]1\left(t-\frac{x+l}{v}\right)+\left(K_1+K_2\right)[\exp(l\,x)\times\\
&\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\exp(-2k\,l\,l)1\left(t-\frac{2kl-x}{v}\right)-\exp(-l\,x)\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\exp(-2k\,l\,l)1\left(t-\frac{2kl+x}{v}\right)]\\
&-Z_W\{\left[K_3\exp(l\,(2l+x))+K_4\exp(l\,x)\right]\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\exp(-2k\,l\,l)1\left(t-\frac{2(k-1)l-x}{v}\right)+\\
&+\left[K_3\exp(-l\,x)+K_4\exp(-l\,(2l+x))\right]\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\exp(-2k\,l\,l)1\left(t-\frac{2(k+1)l+x}{v}\right)\},
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $v=1/\sqrt{L_0C_0}$ – скорость распространения электромагнитной волны в линии.

Для линии без искажений, которая в установившемся режиме в своем начале была подключена к источнику постоянного напряжения и работала на холостом ходу, а при коммутации была разомкнута в своем начале, решение относительно тока может быть получено из выражения (8) с использованием граничных условий $I(0,p)=0$, $I(l,p)=0$.

$$
\begin{aligned}
i(x,t) &= \left[K_3 \exp(l\,x) + K_4 \exp(-l\,x)\right]1(t) - \left(K_3+K_4\right)\exp(-l\,x)1\left(t-\frac{x}{v}\right)+ \\
&+\left[K_3 \exp(-l\,x) + K_4 \exp(-l\,(2l+x))\right]1\left(t-\frac{x+l}{v}\right)+\left(K_3+K_4\right)[\exp(l\,x)\times \\
&\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \exp(-2k\,l\,l)1\left(t-\frac{2kl-x}{v}\right)-\exp(-l\,x)\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \exp(-2k\,l\,l)1\left(t-\frac{2kl+x}{v}\right)] \\
&-\left[K_3 \exp(l\,(2l+x)) + K_4 \exp(l\,x)\right]\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \exp(-2k\,l\,l)1\left(t-\frac{2(k-1)l-x}{v}\right)+ \\
&+\left[K_3 \exp(-l\,x) + K_4 \exp(-l\,(2l+x))\right]\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \exp(-2k\,l\,l)1\left(t-\frac{2(k+1)l+x}{v}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

На рисунке приведены нормированные на максимум пространственные распределения напряжения (14) и тока (15) в линии при переходных процессах для различных моментов времени.



а *б*

Эпюры напряжения (*а*) и тока (*б*) в линии при переходных процессах в моменты времени *t*: 1 – 0; 2 – 0.5*T*; 3 – 0.75*T*; 4 – *T*; 5 – 1.75*T*; 6 – 500*T*; 7 – 501*T*, где $T = l/v$ – время распространения электромагнитной волны в линии

При расчете представленных распределений были приняты следующие параметры линии, характерные для контактных сетей подземного рудничного транспорта: C_0=2·10^{-11} Ф/м; G_0=10^{-8} См/м; L_0=10^{-6} Гн/м; R_0=5·10^{-4} Ом/м; l=1км. Зависимость, представленная на рисунке *а*, соответствует режимам до коммутации $u(x,0) = K_1 \exp(l\,x) + K_2 \exp(-l\,x)$ и после окончания переходного процесса $u(x,+\infty) = 0$, а зависимость на рисунке *б* – режимам до коммутации $i(x,0) = K_3 \exp(l\,x) + K_4 \exp(-l\,x)$ и после окончания переходного процесса $i(x,+\infty) = 0$.

Таким образом, в настоящей работе:

1. Определены распределения напряжения и тока в контактной сети постоянного тока в установившемся режиме.
2. Получены аналитические решения системы дифференциальных уравнений относительно изображений напряжения и тока, описывающие переходный процесс в контактной сети постоянного тока при ненулевых начальных условиях.
3. Показано, что при переходном процессе в сети постоянного тока, в случае мероморфности функций изображений напряжения и тока при нулевых начальных условиях, соответствующие им функции при ненулевых условиях также будут мероморфными.
4. Разработана программная реализация предложенного метода анализа переходных процессов в контактной сети постоянного тока, тестирование которой показало согласованность получаемых оригиналов распределений напряжения и тока в сети с соответствующими граничными условиями и распределениями в установившихся режимах.

Список литературы

1. Крючков И.П., Неклепаев Б.Н., Старшинов В.А. Расчет коротких замыканий и выбор электрооборудования. – М.: Издательский центр “Академия”, 2006. – 416 с.

2. Кузнецов С.М. Защита тяговой сети от токов короткого замыкания. – Новосибирск: НГТУ, 2000. – Ч.2 – 85 с.

3. Бессонов Л.А., Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 2001. – 638 с.

4. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

5. Garbow B.S., Giunta G., Lyness J., Murli A. Software implementation of Week’s method for the inverse Laplace transform problem// ACM Trans. Math. Software. – 1988. – V. 15. – P.163-170.

6. Кожевников А.В., Денисова Г.Е. Обоснование выбора численного метода обратного преобразования Лапласа для нахождения мероморфных функций с конечным числом полюсов// Сб. науч. тр. НГУ. – 2007. – № 27. – С. 184-192.