

**Н.В. Куваев***(Украина, Днепропетровск, Национальный горный университет)*

## ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫМ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ КЛЕТЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ СОРТОПРОКАТНЫХ СТАНОВ

На современных непрерывных сортовых и проволочных станах выпускается широкий сортамент проката. Как при настройке режима непрерывной прокатки из-за погрешности его начального расчета, так и в процессе прокатки из-за действия технологических возмущений в прокате возникают межклетьевые усилия. Межклетьевые усилия в прокате приводят к нестабильности его поперечных размеров.

Информацию о величине межклетьевых усилий в прокате получают путем контролирования прогиба проката между клетями, сопоставления статических моментов в клетях и другими методами. Поскольку клетки связаны друг с другом через прокатываемый металл, то изменение частоты вращения привода отдельной клетки приводит к изменению межклетьевых усилий в прокате как перед, так и за клетью. Для устранения отклонения межклетьевых усилий даже в одном межклетьевом промежутке необходимо регулировать частоту вращения электроприводов нескольких клеток группы. Задача усложняется при отклонении межклетьевых усилий от заданных значений в нескольких межклетьевых промежутках.

Для повышения динамической точности стабилизации заданных межклетьевых усилий в прокате необходимо решить задачу оптимального управления взаимосвязанными электроприводами в режиме стабилизации межклетьевых усилий.

При решении задачи будем рассматривать обобщенную непрерывную поточную линию (рис. 1).

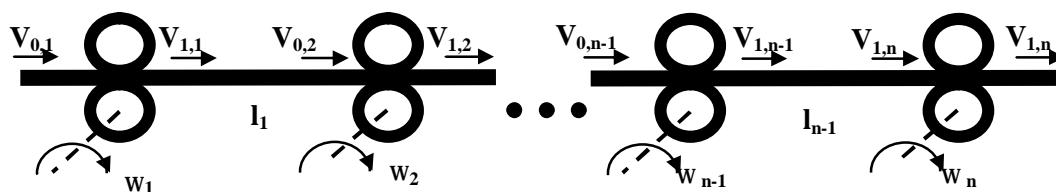


Рис. 1. Обобщенный вид непрерывной поточной линии:

- $w_1, \dots, w_n$  – частоты вращения приводов механизмов поточной линии;
- $l_1, \dots, l_{n-1}$  – длина материала между соответствующими механизмами поточной линии;
- $V_{0,1}, \dots, V_{0,n}$  – линейная скорость обрабатываемого (рабочего) материала на входе перед соответствующим механизмом поточной линии;
- $V_{1,1}, \dots, V_{1,n}$  – линейная скорость обрабатываемого (рабочего) материала на выходе из соответствующего механизма поточной линии.

Данный объект управления описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl_i}{dt} &= V_{1,i} - V_{0,i} \\ V_{1,i} &= a_i w_i \\ V_{0,i} &= \frac{a_i}{m_i} w_i \end{aligned} \right\},$$

где  $a_i$  – коэффициент передачи  $i$ -го механизма;  $m_i$  – коэффициент вытяжки материала в  $i$ -м механизме. Для конвейерных линий  $m=1$ .

В векторной форме уравнение состояния объекта запишется так:

$$\dot{\bar{l}} = A \cdot \bar{w}, \quad (1)$$

где  $\bar{l}$  –  $(n-1)$ -мерный вектор длины обрабатываемого материала между механизмами непрерывной поточной линии, а  $\dot{\bar{l}}$  – его производная;  $\bar{w}$  –  $n$ -мерный вектор частот вращения приводов механизмов непрерывной поточной линии;  $A$  – матрица коэффициентов объекта управления размерности  $(n-1) \times n$  с элементами

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= a_i ; \\ a_{i,i+1} &= -\frac{a_{i+1}}{m_{i+1}} ; \\ a_{i,j} &= 0, \quad j \neq i, j \neq i+1; \end{aligned} \quad (2)$$

Наилучший, определяющий конечное состояние системы, технологический режим таких линий характеризуется заданной линейной скоростью материала на выходе линии  $V_{Z,1,n}$ , определяющей ее производительность, и заданной длиной обрабатываемого материала между механизмами  $l_{Z,1} \dots l_{Z,n-1}$ , либо натяжением материала, линейно связанного с его длиной (удлинением) через закон Гука.

При аналитическом решении задачи оптимального управления в качестве критерия оптимизации примем критерий вида

$$I_k = \int_0^{\infty} \left( (\bar{w} - \bar{w}_0)^T B (\bar{w} - \bar{w}_0) + \dot{\bar{w}}^T C \dot{\bar{w}} + (\bar{l} - \bar{l}_0)^T G (\bar{l} - \bar{l}_0) \right) dt \quad (3)$$

где  $\bar{w}$  –  $n$ -мерный вектор частоты вращения приводов механизмов;  $\bar{w}_0$  –  $n$ -мерный вектор частоты вращения приводов при «наилучшем» технологическом режиме;  $\dot{\bar{w}}$  – производная вектора  $\bar{w}$ ;  $\bar{l}$  –  $(n-1)$ -мерный вектор длины обрабатываемого материала между механизмами поточной линии;  $\bar{l}_0$  –  $(n-1)$ -мерный вектор длины обрабатываемого материала между механизмами при «наилуч-

шем» режиме;  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G}$  – диагональные матрицы размером  $n \times n$  (матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ ) и  $(n-1) \times (n-1)$  (матрица  $\mathbf{G}$ ) весовых коэффициентов  $b_i$ ,  $c_i$   $i=1 \dots n$ ;  $g_i$   $i=1 \dots (n-1)$ . Коэффициентами  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $g_i$  (их соотношением) задают точность стабилизации соответствующего параметра.

Компонента вектора  $\bar{w}_0$  определяется из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} w_{0,n} &= \frac{V_{z,1,n}}{a_n} \\ A\bar{w}_0 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Введение в критерий (3) производных частот вращений приводов учитывает требования по ограничению динамических нагрузок в механизмах. Средне-квадратичное значение производной частоты вращения характеризует также расход энергии на управление [2, 3], т.е. учитывает ограниченную мощность и быстродействие автоматизированного электропривода механизмов поточной линии.

Эффективное управление автоматизированным электроприводом механизмов непрерывной поточной линии в предельно допустимых режимах работы может быть достигнуто за счет введения дополнительных отрицательных связей и выбором параметров регуляторов дополнительных контуров регулирования [4, 5]. Работа автоматизированного электропривода и объекта управления в зоне допустимых характеристик должна обеспечиваться соответствующим выбором и, при необходимости, адаптацией параметров регуляторов системы.

При использовании метода, основанного на классическом вариационном исчислении, мы непосредственно без дополнительных преобразований получаем линейные дифференциальные уравнения поведения системы [8].

Для удобства дальнейшего синтеза выражения (1) и (3) запишем в следующем виде:

$$I_k = \int_0^{\infty} (\bar{w}_{\Delta}^T B \bar{w}_{\Delta} + \bar{w}_{\Delta}^T C \bar{w}_{\Delta} + \bar{l}_{\Delta}^T G \bar{l}_{\Delta}) dt;$$

$$\bar{l}_{\Delta} = A \bar{w}_{\Delta}; \quad (4)$$

где

$$\bar{w}_{\Delta} = \bar{w} - \bar{w}_0;$$

$$\bar{l}_{\Delta} = \bar{l} - \bar{l}_0.$$

Траекторию движения определим из уравнений Эйлера-Лагранжа [6, 7]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I_k^*}{\partial \bar{w}_{\Delta}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I_k^*}{\partial \dot{\bar{w}}_{\Delta}} &= 0 \\ \frac{\partial I_k^*}{\partial \bar{l}_{\Delta}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I_k^*}{\partial \dot{\bar{l}}_{\Delta}} &= 0 \end{aligned} \right\};$$

где  $I_k^*$  – функция Гамильтона, которую можно записать так:

$$I_k^* = \bar{w}_\Delta^T B w_\Delta + \bar{w}_\Delta^T C \bar{w}_\Delta + \bar{l}_\Delta^T G \bar{l}_\Delta + y^T \left( \bar{l}_\Delta - A \bar{w}_\Delta \right).$$

Здесь  $\psi$  – система  $(n-1)$  постоянных.

Воспользуемся правилами дифференцирования матричного исчисления [9] и получим

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{w}_\Delta^T B - y^T A - 2\bar{w}_\Delta^T C &= 0 \\ 2L_\Delta^T G - y^T &= 0 \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$C \bar{w}_\Delta - B \bar{w}_\Delta = -A^T G \bar{l}_\Delta. \quad (5)$$

Решаем уравнение (5) совместно с (4) и получаем, что

$$C \bar{w}_\Delta - B \bar{w}_\Delta + A^T G A \bar{w}_\Delta = 0. \quad (6)$$

Приводя выражение (6) к нормальному виду Коши и воспользовавшись формулой Шура для блочных матриц [10], можно показать, что характеристические числа уравнения (6) находятся из следующего определителя:

$$\left| E \bar{I}^T - C^{-1} B \bar{I}^2 + C^{-1} A^T G A \right|, \quad (7)$$

где  $E$  – единичная матрица;  $\bar{I}$  – столбец характеристических чисел.

Поскольку определитель (7) не является определителем диагональной или псевдодиагональной формы, то найти характеристические числа не представляется возможным [1]. Для определения характеристических чисел раскроем и преобразуем выражение (6).

Для  $i$ -й строки полученной системы уравнений можно записать, что:

$$c_i \bar{w}_{\Delta i} + b_i \bar{w}_{\Delta i} + \left( \frac{a_i^2}{m_i^2} + a_i^2 g_i \right) w_{\Delta i} = -a_i \frac{a_{i+1}}{m_{i+1}} g_i w_{\Delta i+1} - \frac{a_i}{m_i} a_{i-1} g_{i-1} w_{\Delta i-1}. \quad (8)$$

Характеристические числа уравнения (7)

$$I_{i(1,2,3,4)} = \pm \sqrt{\frac{b_i}{2c_i} \pm \sqrt{\frac{b_i^2}{4c_i^2} - \left( \frac{a_i^2 g_{i-1}}{m_i^2 c_i} + a_i^2 \frac{g_{i-1}}{c_i} \right)}}.$$

Следовательно,  $n$  уравнений, полученных в результате преобразования выражения (6), дадут нам все  $4n$  характеристических числа. Числа с отрицательной вещественной частью соответственно будут:

при  $\frac{b_i^2}{4c_i^2} > \left( \frac{a_i^2 g_{i-1}}{m_i^2 c_i} + a_i^2 \frac{g_i}{c_i} \right)$

$$I_{i1,2} = -\sqrt{\frac{b_i}{2c_i} \pm \sqrt{\frac{b_i^2}{4c_i^2} - \left( \frac{a_i^2 g_{i-1}}{m_i^2 c_i} + a_i^2 \frac{g_{i-1}}{c_i} \right)}} ;$$

при  $\frac{b_i^2}{4c_i^2} = \left( \frac{a_i^2 g_{i-1}}{m_i^2 c_i} + a_i^2 \frac{d_i}{c_i} \right)$

$$I_{i1} = I_{i2} = -\sqrt{\frac{b_i}{c_i}} ;$$

при  $\frac{b_i^2}{4c_i^2} < \left( \frac{a_i^2 g_{i-1}}{m_i^2 c_i} + a_i^2 \frac{d_i}{c_i} \right)$

$$I_{i1,2} = -\sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a_i^2 g_{i-1}}{m_i^2 c_i} + a_i^2 \frac{g_i}{c_i} + \frac{b_i}{2c_i}} \right)} \pm j \times \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a_i^2 g_{i-1}}{m_i^2 c_i} + a_i^2 \frac{g_i}{c_i} - \frac{b_i}{2c_i}} \right)}.$$

При аналитическом конструировании регуляторов устойчивость системы достигается путем отбрасывания в решении уравнения составляющих, соответствующих корням с положительной вещественной частью [11]. Тогда уравнение (8) приводится к виду

$$\mathbf{w}_{\Delta i} - (I_{i1} + I_{i2}) \mathbf{w}_{\Delta i} + I_{i1} I_{i2} \mathbf{w}_{\Delta i} = I_{\Delta i(i+1)} \mathbf{w}_{\Delta(i+1)} - I_{\Delta i(i-1)} \mathbf{w}_{\Delta(i-1)},$$

а уравнение (6) соответственно

$$\mathbf{w}_{\Delta} - (\Lambda_1 + \Lambda_2) \mathbf{w}_{\Delta} + (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_{\Delta}) \mathbf{w}_{\Delta} = 0, \quad (9)$$

где  $\Lambda_1 = \text{diag}[I_{1,1} \dots I_{1,n}]$ ;  $\Lambda_2 = \text{diag}[I_{2,1} \dots I_{2,n}]$ ;  $\Lambda_{\Delta}$  – матрица размерностью  $n \times n$  с элементами

$$I_{\Delta i(i+1)} = \frac{1}{I_{i1} I_{i2}} a_i \frac{a_{i+1}}{m_{i+1}} \frac{g_i}{c_i};$$

$$I_{\Delta i(i-1)} = \frac{1}{I_{i1} I_{i2}} \frac{a_i}{m_i} a_{i-1} \frac{g_i}{c_i};$$

$$I_{\Delta ij} = 0, j \neq i+1, j \neq i-1;$$

Найдем матрицу  $A^*$ , которая удовлетворяет следующему равенству:

$$A^* A = \Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_{\Delta}. \quad (10)$$

Учитывая, что все элементы матрицы  $A$ , кроме  $a_{i,i}, a_{i,(i+1)}$ , равны нулю, то из уравнения (10) получаем

$$I_{1i} I_{2i} = a_{i,(i-1)}^* a_{(i-1),i} + a_{i,i}^* a_{i,i}; \quad (11)$$

$$I_{\Delta i,(i+1)} = a_{i,i}^* a_{i,(i+1)} + a_{i,(i+1)}^* a_{(i+1),(i+1)}; \quad (12)$$

$$I_{\Delta i,(i-1)} = a_{i,(i-2)}^* a_{(i-2),(i-1)} + a_{i,(i-1)}^* a_{(i-1),(i-1)}; \quad (13)$$

$$a_{i,(j-1)}^* a_{(j-1),j} + a_{i,j}^* a_{j,j} = 0, \quad \text{при } j > i, j < i-1. \quad (14)$$

Очевидно, что формула (14) является совокупностью систем уравнений относительно  $a_{i,j}^* (j < i-1, j > i)$  с определителями

$$\Delta_i = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{(i-2),(i-2)} a_{(i+1),(i+1)} \dots a_{(n-1),(n-1)} \neq 0$$

имеющими единственное нулевое решение [12]

$$a_{i,j}^* = 0, \quad j > i, j < i-1. \quad (15)$$

Из формул (12), (13) с учетом (15) получаем

$$a_{i,i}^* = \frac{1}{I_{1i} I_{2i}} a_i \frac{g_i}{c_i}; \quad (16)$$

$$a_{i,(i-1)}^* = -\frac{1}{I_{1i} I_{2i}} \frac{a_i}{m_i} \frac{g_{i-1}}{c_i}. \quad (17)$$

Подстановка выражений (16), (17) в (11) даст тождество.

Последовательно преобразуя уравнение (9) с учетом (10), (2) и интегрируя обе его части, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{\bar{w}}_{\Delta} - (I_1 + I_2) \bar{w}_{\Delta} = -A^* \bar{l}_{\Delta} - C^*(0),$$

где  $C^*(0)$  – постоянная интегрирования.

Тогда передаточная функция оптимального регулятора

$$\frac{\bar{w}_{\Delta}(p)}{\bar{l}_{\Delta}(p)} = -|Ep + \Lambda_1 + \Lambda_2|^{-1} A^*. \quad (18)$$

Правая часть формулы (18) представляет матрицу  $[W_p]$  размерностью  $n \times (n-1)$  с элементами

$$W_{pi,i} = -\frac{K_{pi}}{T_{pi}p + 1};$$

$$W_{pi,(i-1)} = K_{li} \frac{K_{pi}}{T_{pi}p + 1};$$

$$W_{pi,j} = 0, j \neq i, j \neq i-1.$$

где  $T_{pi}$  – постоянная времени разомкнутого канала регулирования электропривода  $i$ -го механизма;  $K_{pi}$  – коэффициент усиления канала регулирования электропривода  $i$ -го механизма;  $K_{li}$  – коэффициент эквивалентности длины обрабатываемого (рабочего) материала между  $i-1$ -м и  $i$ -м механизмом.

$$T_{pi} = \frac{1}{|I_{1i} + I_{2i}|};$$

$$K_{pi} = a_i \frac{g_i}{c_i} \frac{1}{I_{1i} I_{2i} |I_{1i} + I_{2i}|};$$

$$K_{li} = \frac{1}{m_i} \frac{g_{i-1}}{g_i}.$$

В реальной системе постоянная времени  $T_{pi}$  ограничена снизу максимальной некомпенсируемой постоянной времени контуров регулирования длины обрабатываемого (рабочего) материала  $i$ -го механизма, а максимальный “оптимальный” коэффициент усиления регулятора соответствует настройке соответствующего контура на так называемый “модульный оптимум”. Коэффициент  $K_{li}$  учитывает различие требований по точности стабилизации длины обрабатываемого (рабочего) материала между  $i-1$ -м,  $i$ -м и  $i+1$ -м механизмами. Наличие в выражении для  $K_{li}$  коэффициента вытяжки  $m_i$  связано с тем, что изменение длины обрабатываемого материала перед  $i$ -м механизмом за счет изменения скорости (частоты вращения привода) последнего приводит к  $m_i$ -раз большему приращению (с обратным знаком) длины обрабатываемого материала непосредственно за данным механизмом. Это свойство вытекает непосредственно из закона постоянства секундных объемов обрабатываемого материала, проходящего через различные сечения непрерывной поточной линии, см., например, работу [13].

**Вывод.** Предложенная рациональная структура системы управления и передаточные функции регуляторов позволяют повысить стабильность, сократить время настройки технологического процесса, что может способствовать увеличению производительности металлургических предприятий Украины и улучшению качества продукции.

#### Список литературы

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
2. Летов А.М. Динамика полета и управления. – М.: Наука, 1969. – 360 с.
3. Дубковская А.Г., Куртиш А.Ю. Автоматизация исследования, проектирования и управления электромеханическими системами // Изв. ЛЭТИ: Сб. научн. тр. – 1983. – Вып. 331. – С. 109–114.
4. Филатов А.С., Дралюк Б.Н., Валдырев А.С. Ограничение координат в электроприводах со-

- гласованно управляемых механизмов. // Электричество. – 1983. – №8. – С. 57–60.
5. Валдырев А.С. Разработка, исследование и внедрение системы автоматического управления скоростными режимами стана холодной прокатки полосы: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М.: 1981. – 25 с.
  6. Брайсон А. Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
  7. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1961. – 228 с.
  8. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. шк., 1980. – 287 с.
  9. Чаки Ф. Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Мир, 1975. – 424 с.
  10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
  11. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Ч. 3. Оптимальные, многосвязные и адаптивные системы. – Л.: Энергия, 1970. – 328 с.
  12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
  13. Выдрин В.Н., Федосиенко А.С., Крайнов В.И. Процесс непрерывной прокатки – М.: Металлургия, 1970. – 456 с.