УДК 622.7.012.7:658.011.56

М.В. Назаренко, канд. техн. наук
(Україна, Кривий Ріг, Криворізький технічний університет)

ДОСЛІДЖЕННЯ КОРЕКТНОСТІ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСУ ПЕРЕРОБКИ СИРОВИНИ ГІРНИЧО-ЗБАГАЧУВАЛЬНИМ КОМБІНАТОМ

Для створення систем автоматичного керування необхідно мати математичну модель об'єкта керування. Цю задачу можна розв'язувати різними методами. Основою для цього можуть бути рівняння, одержані аналітично з урахуванням фізичних законів функціонування процесу. Але це практично неможливо з причини складності самих процесів. Методів держання моделей досить багато. Один із них – експериментальний. Тому в даній роботі зосередимо увагу не на методах одержання моделей, а на даних, які використовуються для цього.

Як правило, процеси в технології збагачення характеризуються стабільністю значень вхідних і вихідних технологічних параметрів. Ці значення підтримуються на рівнях, що, може, не забезпечують істинних оптимальних показників, але вони відносно близькі до них.

Стабілізація вхідних та вихідних параметрів технологічних процесів є необхідністю з погляду технолога. Розглянемо це питання щодо використання таких, майже стабільних, показників технологічного процесу для синтезу математичної моделі.

Дуже важливим є питання одержання адекватної моделі з використанням наявних даних про технологічний процес. Насамперед це стосується чутливості моделі та розрахунків прогнозу значень технологічних параметрів за допомогою цієї моделі, а також синтезу дієздатного регулятора процесів від вхідних даних.

Під чутливістю моделі будемо розуміти прийняте в математиці поняття, яке характеризує відношення приросту розв'язання задачі до приросту вхідних даних або параметрів об'єкта. Якщо чутливість моделі велика, то надійність роботи регулятора буде невисокою. Для аналізу чутливості можна використати апарат варіаційного числення або матричний апарат, який також пропонується для одержання математичних моделей виробничих процесів.

Надалі з'ясуємо, в якій мірі підтримання значень технологічних параметрів на постійному рівні відбивається на якості математичних моделей, яки можуть бути одержані з таких даних.

У табл. 1 наведено фрагмент даних про технологічний процес переробки сировини на збагачувальній фабриці РОФ-1 Інгулецького ГЗК.

З цієї таблиці видно, що значення деяких технологічних параметрів, як наприклад, вихід концентрату, заліза магнітного, витяг заліза магнітного, відходи у хвости, відносно мало змінюються. В табл. 1 стовпчики, відповідні технологічним параметрам, позначені іменами змінних.

Таблиця 1

Фрагмент даних, які характеризують технологічний процес рудозбагачувальної фабрики

Збагачувальна фабрика РОФ – 1											
Секція 1											
Руда	Концентрат				Витяг		Хвости		Питомі витрати		Утримання класу -.044 мкм в концентраті
Переробка	Фактично	Залізо загальне	Вихід	Вологість	Залізо загальне	Залізо магніт-не	Залізо загальне	Залізо магнітне	Ел. енергії	Води	
X_1	X_2	X_3	y	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
1708	709	64,4	37,3	11,23	74,88	97,67	12,85	0,85	35,11	84,48	96,44
2050	806	63,83	35,98	9,6	71,3	94,7	14,44	1,9	23,43	80,86	97,3
158	65	63,3	37,32	9,8	73,34	94,81	13,7	1,9	30,22	89,17	95,1
2096	822	64,88	35,78	9,88	72,07	94,35	14,01	2,02	25,64	78,64	96,36
1727	687	64,69	36,28	9,95	72,98	95,65	13,64	1,58	28,76	87,08	96,89
878	350	64,71	35,7	11,46	71,83	94,8	14,09	1,87	29,89	91,5	94,43
1656	649	64,55	35,66	10,05	72,96	95,8	13,26	1,46	24,38	1,98	97,19
1748	672	64,58	34,68	10,88	70,99	94,72	14,01	1,81	29,68	98,32	97,11
1758	676	64,64	34,81	10,58	71,32	94,15	13,88	2,01	33,8	0,85	96,36
1686	655	63,96	35,5	9,74	72,15	94,69	13,59	1,82	23	93,53	94,26
1764	665	65,18	34,19	10,33	70,81	93,72	13,96	2,11	30,36	94,37	97,1
218	84	64,1	35,36	9,6	72,02	95,79	13,62	1,44	30,21	11,26	98
1782	687	64,14	35,12	10,03	71,35	94,4	13,94	1,94	26,7	92,94	95,98
93	35	65	34,76	10	71,57	94,43	13,76	1,92	216,4	12,11	97,6
1930	740	64,3	34,98	9,85	71,25	94,51	13,96	1,9	30,76	95,62	94,88
1894	728	64,48	34,75	10,63	70,95	94,05	14,06	2,05	25,57	85,36	95,94
1924	740	63,85	35,21	9,5	71,19	94,2	14,04	2,01	26,6	81,48	94,66
600	234	65,5	34,63	12,4	71,83	94,09	13,61	2,03	52,13	9,74	92,5
1820	698	64,71	34,97	9,88	71,59	95,74	13,81	1,48	25,1	86,83	96,63
1739	659	64,45	34,4	10,3	70,14	93,43	14,39	2,26	29,18	91,53	93,66
1872	726	63,61	35,43	9,75	71,3	94,88	14,05	1,79	27,77	90,69	93,31

Для одержання моделі, наприклад, методом найменших квадратів, використовують рівняння:

$$\sum x_{i,j} b_j = y_i \text{, i=1,..,n, j=1,..m,} \quad (1)$$

де: $x_{i,j}$- значення j-го технологічного параметра в i-му рядку таблиці даних; b_j, b_0– значення коефіцієнтів моделі, які треба знайти; y_i –значення вихідної величини в i-му рядку таблиці; m, n – відповідно кількість експериментів (рядків даних) та кількість змінних.

Значення технологічних параметрів $x_{i,j}$ (табл. 1) утворюють матрицю відомих коефіцієнтів системи рівнянь. Невідомими є значення коефіцієнтів моделі b_j та b_0.

Відзначимо одну важливу особливість системи рівнянь (1). Для оцінки невідомих коефіцієнтів моделі дані з табл. 1. використовуються для заповнення матриці (1). Як бачимо, стовпчики або рядки матриці (1) досить близькі за своїми значеннями, тобто вектори-рядки (вектори-стовпці) майже паралельні. Це говорить про формальну їх залежність та невисоку очікувальну точність розрахунків коефіцієнтів моделі, про що йдеться далі. Відомо [1], що геометрична інтерпретація лінійної залежності стовпчиків матриці – малий кут між стовпчиками матриці (векторами). Розрахунки косинусів кутів між стовпцями матриці (1) зведені в табл. 2, де також наведено аргументи значень відповідних елементів матриці (1). Для наочності розраховані також кути між ними.

Таблиця 2

Кути між векторами-стовпчиками таблиці даних

Вихід кл + 20	Витрати води	Продуктивність по шихті	Вихід кл + 20	Продуктивність по шихті	Витрати води
13,4	34,4949	3527,05	13,4	3527,05	34,4949
13,65	40,37722	2323,95	13,65	2323,95	40,37722
12,37	35,31125	3089,71	12,37	3089,71	35,31125
13,17	33,72024	3237,55	13,17	3237,55	33,72024
17,67	33,50392	3323,83	17,67	3323,83	33,50392
12,87	38,61082	2499,82	12,87	2499,82	38,61082
13	39,01418	2233,02	13	2233,02	39,01418
15	37,0834	2573,34	15	2573,34	37,0834
20	42,15046	3568,32	20	3568,32	42,15046
13,5	39,76045	2731,99	13,5	2731,99	39,76045
14,4	69,13443	3280,82	14,4	3280,82	69,13443
18,13	32,67628	3542,77	18,13	3542,77	32,67628
cos(кут)	0,964058	cos(кут)	0,987977	cos(кут)	0,987977
кут (град)	15,41586	кут (град)	8,898282	кут (град)	8,898282

З цієї таблиці бачимо, що у середньому кути між стовпцями зазначеної матриці близькі до нуля. Це і є наслідком стабілізації технологічних параметрів, про що було зазначено раніше.

У цьому випадку необхідно проаналізувати вплив збурювання коефіцієнтів матриці x_{ij} і правих частин рівняння (1) на розв’язання.

Після скорочення запису рівняння (1) набуває вигляду

$$X\overline{b} = \overline{y}, \qquad (2)$$

де X – матриця коефіцієнтів, складена зі значень змінних технологічного процесу; $\overline{b}$ – вектор шуканих коефіцієнтів: $\overline{y}$ - вектор-стовпець вихідного параметра.

У прийнятих позначеннях при збурюванні правих частин рівняння (2) оцінка помилки у визначенні вектора коефіцієнтів $\overline{b}$ має вигляд [2] :

$$\frac{\left\|\delta\overline{b}\right\|}{\left\|\overline{b}\right\|} \le K(x)\frac{\left\|\delta\overline{y}\right\|}{\left\|\overline{y}\right\|} \ . \qquad (3)$$

Коефіцієнт обумовленості, як відомо, визначається так

$$K(x) = \|x\|\|x^{-1}\|$$

або

$$K(x) \geq \frac{\max(\lambda i)}{\min(\lambda j)} \geq 1 \ ,$$

де λi – власні числа матриці *X*.

Оскільки у нашому випадку $K > 1$, то відповідно до (3) відносне збурювання вектора правих частин (2) буде викликати завжди більше відносне збурювання вектора розв'язання $\bar{b}$.

$$\frac{\|\delta\bar{b}\|}{\|\bar{b}\|} \leq K(x)\frac{\|\delta\bar{y}\|}{\|\bar{y}\|} \ . \tag{4}$$

Аналогічне співвідношення існує і для випадку збурювання коефіцієнтів матриці *X*

$$\frac{\|\delta\bar{b}\|}{\|\bar{b}+\delta\bar{b}\|} \leq K(x)\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \ . \tag{5}$$

Таким чином, помилки розв'язання пояснюються двома факторами: помилками збурювання через помилки округлення, неточними методами виміру і чутливістю самої задачі (матриці *X*) до цих збурювань.

Однак, констатації цих відомих факторів недостатньо. Розглянемо наступні випадки.

1. Матриця *X* – квадратна. Вираз (2) можна розв'язати звичайними методами для лінійних алгебраїчних рівнянь. Помилка розв'язання буде визначатися числом обумовленості *K*(*x)* (див. раніше).
2. Матриця *X* – квадратна. Розв'язання рівняння (2) знаходиться методом найменших квадратів. У цьому випадку запишемо :

$$X^T X\bar{b} = X^T\bar{y} \ . \tag{6}$$

Відомо, що число обумовленості добутку матриць дорівнює добутку чисел їхньої обумовленості. Відомо також, що характеристичні поліноми взаємно транспонованих матриць збігаються, то з визначення числа обумовленості як

$$K(x) = \frac{\max(\lambda i)}{\min(\lambda i)} > 1 \ ,$$

бачимо, що

$$K(X^T \cdot X) = K^2(X) = K^2(X^T) > K(X)\ .$$

Отже, за винятком, коли $K(X) = 1$ (що буває вкрай рідко, а у виробничих задачах неможливо), зрозуміло, що розв’язання методом найменших квадратів завжди гірше, ніж іншими способами.

Якщо матриця X добре обумовлена, то розв’язання методом найменших квадратів може бути цілком прийнятним. Однак, при вирішенні більшості виробничих задач зазначеного типу необхідна оцінка похибки розв’язання.

Розглянемо приклад. Для цього утворимо з частини табл. 1 матрицю.

Таблиця 3

Вхідні дані для обчислення числа обумовленості

64,4	37,3	11,23	74,88	97,67	12,85
63,83	35,98	9,6	71,3	94,7	14,44
63,3	37,32	9,8	73,34	94,81	13,7
64,88	35,78	9,88	72,07	94,35	14,01
64,69	36,28	9,95	72,98	95,65	13,64
64,71	35,7	11,46	71,83	94,8	14,09
64,55	35,66	10,05	72,96	95,8	13,26
64,58	34,68	10,88	70,99	94,72	14,01
64,64	34,81	10,58	71,32	94,15	13,88
63,96	35,5	9,74	72,15	94,69	13,59
65,18	34,19	10,33	70,81	93,72	13,96
64,1	35,36	9,6	72,02	95,79	13,62
64,14	35,12	10,03	71,35	94,4	13,94
65	34,76	10	71,57	94,43	13,76
64,3	34,98	9,85	71,25	94,51	13,96

Число обумовленості згідно з виразом (5) для матриці $X^T \cdot X$

$$K(X\_15\_6) = 7.923E+6,$$

де *X_15_6* – матриця 15 рядків на 6 стовпчиків.

Розглянемо матрицю X розміром 6x6 (ліва верхня підматриця табл. 3). Для неї

$$K(X\_6\_6) = 1.693E+5.$$

Де *X_6_6* - матриця 6 рядків на 6 стовпчиків.

Після транспонування (як це завжди робиться в методі найменших квадратів) одержимо

$$K(X\_T\_6\_6) = 9.032E+9.$$

Як і слід було очікувати, після транспонування число обумовленості значно зросло.

Число обумовленості досить велике. Тому в даному випадку одержана модель буде обов’язково дуже чутливою до збурень вхідних даних. Підкреслимо, цей висновок стосується всякого методу обчислення коефіцієнтів моделі. Значення помилок може бути одержано з формул (4) та (5).

Основні висновки:

1. Дані, отримані в режимі стабілізації параметрів технологічних процесів, не можуть бути використані для одержання достатньо точної моделі процесу.
2. Така модель може бути придатною для прогнозування, можливо, лише на короткому інтервалі часу.
3. Метод найменших квадратів різко погіршує обумовленість задачі.
4. Розв'язання задачі при чутливій матриці коефіцієнтів не може бути поліпшене підбором методів для її розв'язання.

Список літератури

1. Стенг Г. Лінійна алгебра і її застосування. – М.: Мир, 1980. – С. 324-331.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1966. – Т.3. – С.623-628.